

Exercices

Exercice 1:

1. Résoudre sur $] -\pi; \pi]$ les équations ci-dessous :

a. $\sin(x) = \frac{-1}{2}$

b. $\cos(2x) = \frac{\sqrt{2}}{2}$

c. $\sin(3x) = -\frac{\sqrt{3}}{2}$

2. Résoudre sur $] -\pi; \pi]$ les inéquations ci-dessous :

a. $\cos(x) < \frac{\sqrt{2}}{2}$

b. $\sin(2x) \geq \frac{-1}{2}$

c. $\sqrt{2} \cos\left(x - \frac{\pi}{3}\right) \leq 1$

Exercice 2:

Soit f la fonction définie sur \mathbb{R} par $f(x) = \cos\left(2x + \frac{\pi}{3}\right)$

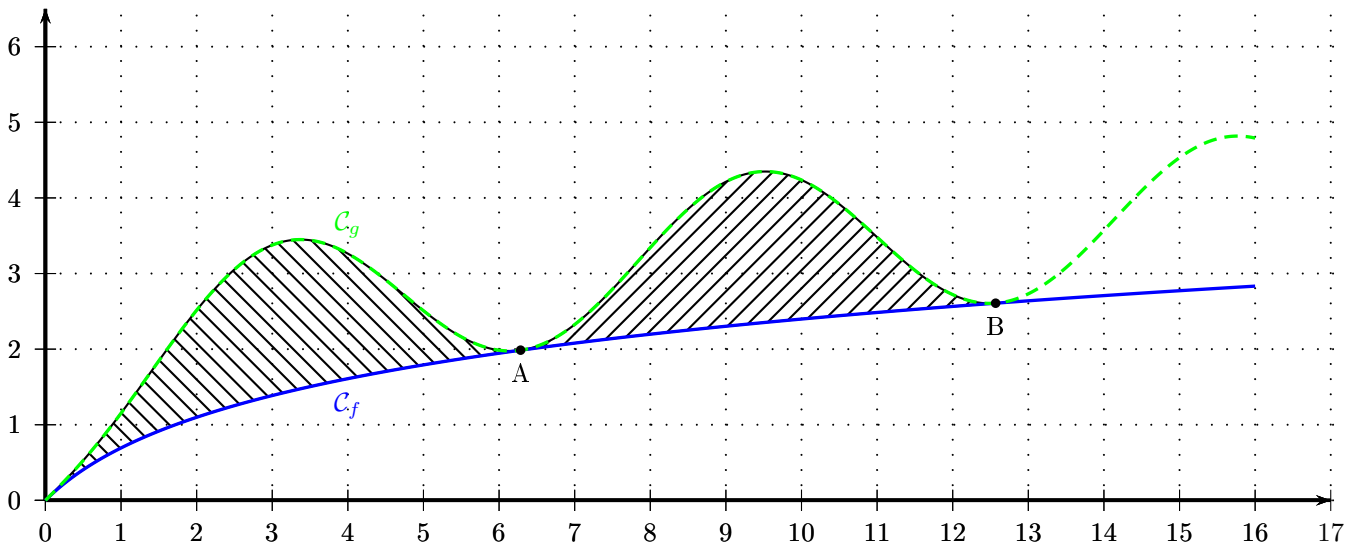
1. Démontrer que f est périodique de période π .
2. Déterminer les antécédents de 0 par la fonction f .
3. Résoudre $f(x) > 0$ sur $[0; 2\pi]$.
4. Étudier les variations de f sur $[0; \pi]$.
5. Tracer la courbe de f sur cet intervalle.

Exercice 3:

On considère les fonctions f et g définies sur l'intervalle $[0 ; 16]$ par

$$f(x) = \ln(x + 1) \quad \text{et} \quad g(x) = \ln(x + 1) + 1 - \cos(x).$$

Dans le repère du plan ci-dessous, on note \mathcal{C}_f et \mathcal{C}_g les courbes représentatives des fonctions f et g .



Comparer les aires des deux surfaces hachurées sur ce graphique.

Exercice 4:

Soit $u = 1 - i$ un nombre complexe.

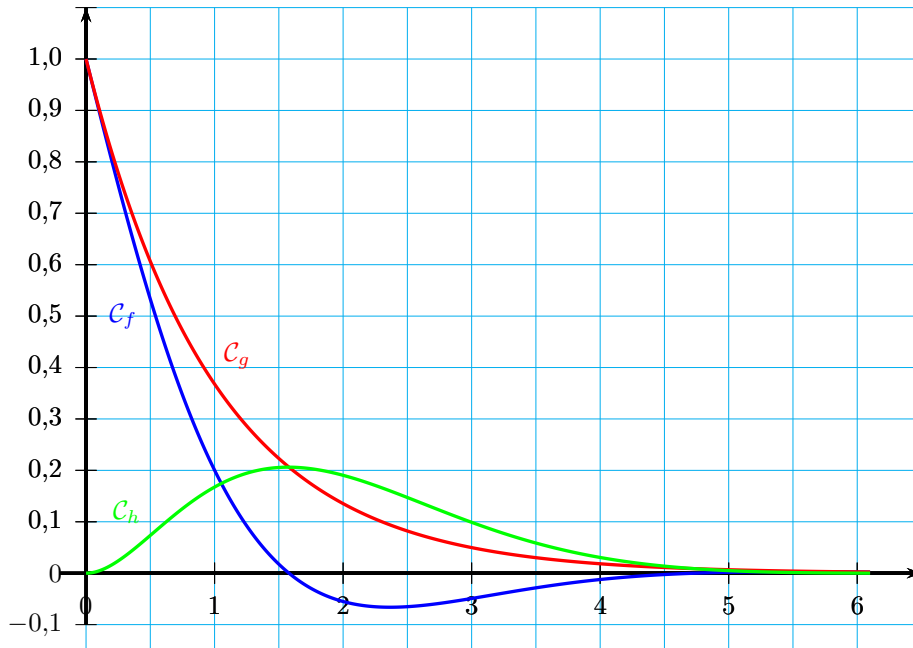
- Déterminer l'écriture exponentielle du nombre u .
- Déterminer, pour tout réel θ , la forme algébrique et l'écriture exponentielle du nombre complexe $e^{i\theta}(1 - i)$.
- Déduire des questions précédentes que, pour tout réel θ , $\cos(\theta) + \sin(\theta) = \sqrt{2} \cos\left(\theta - \frac{\pi}{4}\right)$.

Exercice 5:

On considère les fonctions f et g définies sur l'intervalle $[0 ; +\infty[$ par :

$$f(x) = e^{-x} \cos(x) \quad \text{et} \quad g(x) = e^{-x}.$$

On définit la fonction h sur $[0 ; +\infty[$ par $h(x) = g(x) - f(x)$. Les représentations graphiques \mathcal{C}_f , \mathcal{C}_g et \mathcal{C}_h des fonctions f , g et h sont données ci-dessous :



- Conjecturer :
 - les limites des fonctions f et g en $+\infty$;
 - la position relative de \mathcal{C}_f par rapport à \mathcal{C}_g ;
 - la valeur de l'abscisse x pour laquelle l'écart entre les deux courbes \mathcal{C}_f et \mathcal{C}_g est maximal.
- Justifier que \mathcal{C}_g est située au-dessus de \mathcal{C}_f sur l'intervalle $[0 ; +\infty[$.
- Démontrer que la droite d'équation $y = 0$ est asymptote horizontale aux courbes \mathcal{C}_f et \mathcal{C}_g .
- a. On note h' la fonction dérivée de la fonction h sur l'intervalle $[0 ; +\infty[$. Démontrer que, pour tout x de l'intervalle $[0 ; +\infty[$,

$$h'(x) = e^{-x} \left[\sqrt{2} \cos\left(x - \frac{\pi}{4}\right) - 1 \right]$$

- Justifier que, sur l'intervalle $\left[0 ; \frac{\pi}{2}\right]$, $\sqrt{2} \cos\left(x - \frac{\pi}{4}\right) - 1 \geq 0$ et que, sur l'intervalle $\left[\frac{\pi}{2} ; 2\pi\right]$, $\sqrt{2} \cos\left(x - \frac{\pi}{4}\right) - 1 \leq 0$.
 - En déduire le tableau de variation de la fonction h sur l'intervalle $[0 ; 2\pi]$.
5. On admet que, sur l'intervalle $[0 ; +\infty[$, la fonction H définie par

$$H(x) = \frac{1}{2} e^{-x} [-2 + \cos(x) - \sin(x)]$$

est une primitive de la fonction h . On note \mathcal{D} le domaine du plan délimité par les courbes \mathcal{C}_f et \mathcal{C}_g , et les droites d'équations $x = 0$ et $x = 2\pi$. Calculer l'aire \mathcal{A} du domaine \mathcal{D} , exprimée en unités d'aire.