

# Chapitre 2: Limites de fonctions

## 1 Limites d'une fonction à l'infini

### 1.1 Limite finie

Dans cette partie,  $l$  désigne un nombre réel.

#### Définition:

On dit que  $f$  a pour limite  $l$  en  $+\infty$  si tout intervalle ouvert contenant  $l$  contient toutes les valeurs  $f(x)$  pour  $x$  assez grand. On dit que  $f(x)$  tend vers  $l$  et on note :

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = l$$

#### Remarques:

- Cela veut dire que pour  $x$  assez grand, les valeurs de  $f(x)$  sont très proches du nombre réel  $l$ .
- On définit de la même manière la notion de limite  $l$  en  $-\infty$  que l'on note  $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$

#### Propriété:

Les fonctions  $x \mapsto \frac{1}{x}$ ,  $x \mapsto \frac{1}{x^2}$  et  $x \mapsto \frac{1}{x^n}$  où  $n \in \mathbb{N}^*$  ont pour limite 0 en  $-\infty$  et en  $+\infty$ .

La fonction  $x \mapsto \frac{1}{\sqrt{x}}$  a pour limite 0 en  $+\infty$ .

#### Propriété:

Soit  $C$  la courbe représentative de la fonction  $f$  dans un repère du plan :

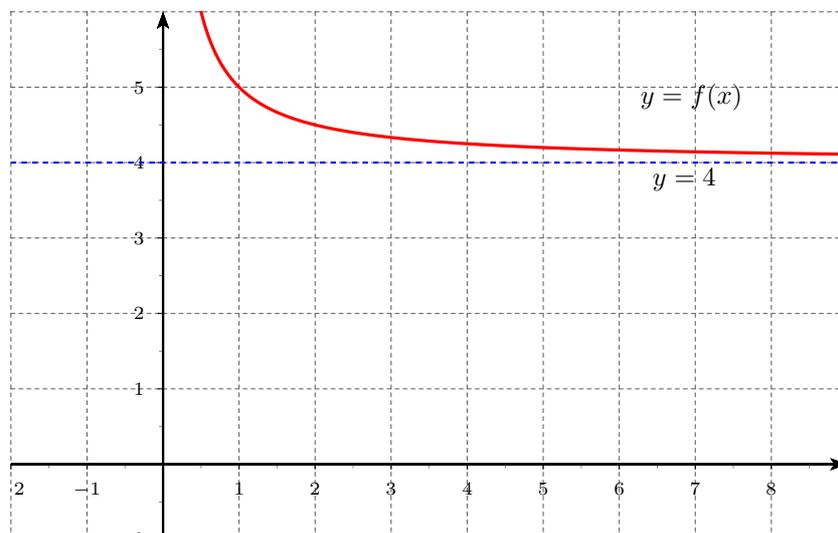
- Si  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = l$  alors la droite d'équation  $y = l$  est une asymptote horizontale à la courbe  $C$  en  $+\infty$ .
- Si  $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = l$  alors la droite d'équation  $y = l$  est une asymptote horizontale à la courbe  $C$  en  $-\infty$ .

#### Exemple:

Soit  $f$  la fonction définie par  $f : x \mapsto 4 + \frac{1}{x}$ .

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x} = 0 \text{ donc } \lim_{x \rightarrow +\infty} 4 + \frac{1}{x} = 4$$

Ainsi la droite d'équation  $y = 4$  est une asymptote horizontale à la courbe  $C$  de la fonction  $f$  en  $+\infty$



## 1.2 Limite infinie

### Définition:

On dit que  $f$  a pour limite  $+\infty$  en  $+\infty$  si tout intervalle  $]A; +\infty[$  contient toutes les valeurs  $f(x)$  pour  $x$  assez grand. On dit que  $f(x)$  tend vers  $+\infty$  en  $+\infty$ . On note :  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$

### Remarques:

- Cela veut dire que pour tout nombre  $A > 0$ , les valeurs de  $f(x)$  dépassent  $A$  pour  $x$  assez grand.
- On définit de la même manière la notion de limite  $-\infty$  en  $+\infty$ , la notion de limite  $+\infty$  en  $-\infty$  et la notion de limite  $-\infty$  en  $-\infty$ .

### Propriété:

La fonction  $x \mapsto x^n$  où  $n \in \mathbb{N}^*$  a pour limite :

- Si  $n$  est pair,  $\lim_{x \rightarrow -\infty} x^n = +\infty$  et  $\lim_{x \rightarrow +\infty} x^n = +\infty$ .
- Si  $n$  est impair,  $\lim_{x \rightarrow -\infty} x^n = -\infty$  et  $\lim_{x \rightarrow +\infty} x^n = +\infty$

## 2 Limite en un réel $a$

### Définition:

On dit que la limite de  $f$  en  $a$  est  $l$  si,  $f(x)$  peut-être rendu aussi proche de  $l$  que l'on veut, à condition que  $x$  soit suffisamment proche de  $a$  et on note :

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = l$$

### Propriété:

- Si  $f$  admet une limite en  $a$  alors elle est unique.
- Si  $f$  est définie en  $a$  et admet une limite en  $a$  alors cette limite est égale à  $f(a)$ .

### Définition:

On dit que  $f$  a pour limite  $+\infty$  en  $a$  si tout intervalle  $]A; +\infty[$  contient toutes les valeurs  $f(x)$  pour  $x$  assez proche de  $a$ . On note :

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = +\infty$$

### Remarques:

Cela veut dire que pour tout nombre  $A > 0$ , les valeurs de  $f(x)$  dépassent  $A$  pour  $x$  assez proche de  $a$ .

### Définition:

Soit  $a$  un réel et  $\mathcal{C}$  la courbe représentative de la fonction  $f$  dans un repère. Lorsque la limite (à droite ou à gauche) de  $f$  en  $a$  est  $+\infty$  ou  $-\infty$ , on dit que la droite d'équation  $x = a$  est une asymptote verticale à la courbe  $\mathcal{C}$ .

### Exemple:

Pour  $x > 2$ ,  $\lim_{x \rightarrow 2^+} x - 2 = 0^+$  et  $\lim_{x \rightarrow 2^+} x + 3 = 5$  donc  $\lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{3+x}{x-2} = +\infty$

donc la droite d'équation  $x = 2$  est une asymptote verticale à la courbe  $\mathcal{C}$  de la fonction  $x \mapsto \frac{3+x}{x-2}$ .

