

Limite d'une fonction à l'infini

On considère les fonctions f et g définies sur $\mathbb{R} \setminus \{1\}$ par $f(x) = \frac{4x+1}{x-1}$ et $g(x) = xf(x)$

1. a. Déterminer les variations de la fonction f sur $\mathbb{R} \setminus \{1\}$.
- b. De quelle valeur se rapproche $f(x)$ lorsque x devient de plus en plus grand ?
- c. Déterminer à l'aide de votre calculatrice un réel M tel que pour tout x appartenant à $]M; +\infty[$ on a : $|f(x) - 4| < 10^{-3}$.
- d. En déduire que pour tout $x \in]M; +\infty[$ on a : $3,999 < f(x) < 4,001$.

Définition:

On dit que f a pour limite l en $+\infty$ si tout intervalle ouvert contenant l contient toutes les valeurs $f(x)$ pour x assez grand. On dit que $f(x)$ tend vers l et on note :

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = l$$

- e. Que peut-on en déduire pour $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$?
 - f. Déterminer $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$.
 - g. Tracer à l'aide de votre calculatrice la courbe de la fonction f .
 - h. Quelle interprétation graphique peut-on faire des questions 2 et 4 ?
2. a. Déterminer les variations de la fonction g sur $\mathbb{R} \setminus \{1\}$.
 - b. Déterminer à l'aide de votre calculatrice un réel N tel que pour tout x appartenant à $]N; +\infty[$ on a : $10^3 < g(x)$.

Définition:

On dit que f a pour limite $+\infty$ en $+\infty$ si tout intervalle de la forme $]A; +\infty[$ contient toutes les valeurs $f(x)$ pour x assez grand. On dit que $f(x)$ tend vers $+\infty$ en $+\infty$. On note : $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$

- c. Que peut-on en déduire pour $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x)$?
 - d. Déterminer à l'aide de votre calculatrice un réel P tel que pour tout x appartenant à $] -\infty; P[$ on a : $-10^3 > g(x)$.
 - e. Que peut-on en déduire pour $\lim_{x \rightarrow -\infty} g(x)$?
3. Déterminer à l'aide de votre calculatrice les limites suivantes :
 - a. $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x^n}$ pour $n \in \mathbb{N}^*$
 - b. $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{x^n}$ pour $n \in \mathbb{N}^*$
 - c. $\lim_{x \rightarrow +\infty} x^n$ pour $n \in \mathbb{N}^*$
 - d. $\lim_{x \rightarrow -\infty} x^n$ pour $n \in \mathbb{N}^*$