Chapitre 30: Nombres complexes IV

Dans ce chapitre, le plan est muni d'un repère orthonormé direct $(O; \overrightarrow{u}, \overrightarrow{v})$.

1 Équations bicarrées

Exercice 1:
Soit (E) l'équation $2z^4 - 14z^2 - 16 = 0$.
1. Donner l'équation (E') obtenu en posant $Z = z^2$ dans l'équation (E).
2. Résoudre (E').
3. En déduire les solutions de (E) dans $\mathbb{C}$.

Exercice 2:
Résoudre dans $\mathbb{C}$ les équations suivantes :

$\frac{1}{2}z^4 + \frac{3}{2}z^2 - 2 = 0$ $\qquad$ $z^4 + 13z^2 - 48 = 0$ $\qquad$ $z^4 - 1 = 0$

Exercice 3:
Résoudre l'équation suivante dans $\mathbb{C}$:

$$(E) : z^5 - 14z^3 + 40z^2 - 75z = 0$$

On pourra montrer dans un premier temps que si z est solution de (E) alors $\overline{z}$ est solution de (E) puis dans un second temps montrer que $1 - 2i$ est solution de (E).

2 Distances

Théorème:
Si A et B sont deux points d'affixes respectives z_A et z_B alors $AB = |z_B - z_A|$

Propriété:
Le point M d'affixe z appartient au cercle de centre $A(z_A)$ et de rayon r si et seulement si :

$$|z - z_A| = r$$

Exercice 4:
Déterminer puis tracer l'ensemble Γ des points M d'affixe z tels que $|z - 5 - 2i| = 3\sqrt{2}$.

Propriété:
Le point M d'affixe z appartient à la médiatrice du segment $[AB]$ avec $A(z_A)$ et $B(z_B)$ si et seulement si :

$$|z - z_A| = |z - z_B|$$

Exercice 5:
Déterminer puis tracer l'ensemble Γ' des points M d'affixe z tels que $|z - 5 - 2i| = |z - 2 + i|$.

3 Angles

Théorème:
Si A et B sont deux points distincts d'affixes respectives z_A et z_B alors $\left(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{AB}\right) = arg(z_B - z_A)$

Exercice 6:
Soient A, B, C et D quatre points d'affixes respectives z_A, z_B, z_C et z_D tels que $z_A \neq z_B$ et $z_C \neq z_D$. Démontrer que :

$$(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{CD}) = arg\left(\frac{z_D - z_C}{z_B - z_A}\right)$$

4 Applications

Exercice 7:
Soient $A(3+2i)$, $B(-3)$ et $C(1-2i)$ trois points du plan complexe.

1. Écrire sous forme algébrique puis sous forme exponentielle le quotient $\dfrac{z_B - z_C}{z_A - z_C}$.
2. En déduire une mesure de l'angle $\left(\overrightarrow{CA}, \overrightarrow{CB}\right)$.
3. Démontrer que $CA = CB$. Conclure sur la nature du triangle ABC.

Exercice 8:
Soient $D(-2i)$, $E(\sqrt{3}+i)$ et $F(-\sqrt{3}+i)$ trois points du plan complexe.

1. Écrire sous forme algébrique puis sous forme exponentielle le quotient $\dfrac{z_F - z_D}{z_E - z_D}$.
2. En déduire une mesure de l'angle $\left(\overrightarrow{DE}, \overrightarrow{DF}\right)$.
3. Démontrer que $DE = DF$. Conclure sur la nature du triangle DEF.

Exercice 9:
A tout point M d'affixe z du plan, on associe le point M' d'affixe z' définie par :

$$z' = z^2 + 4z + 3.$$

1. Un point M est dit invariant lorsqu'il est confondu avec le point M' associé. Démontrer qu'il existe deux points invariants. Donner l'affixe de chacun de ces points sous forme algébrique, puis sous forme exponentielle.
2. Soit A le point d'affixe $\dfrac{-3 - \mathrm{i}\sqrt{3}}{2}$ et B le point d'affixe $\dfrac{-3 + \mathrm{i}\sqrt{3}}{2}$. Montrer que OAB est un triangle équilatéral.
3. Déterminer l'ensemble $\mathcal{E}$ des points M d'affixe $z = x + \mathrm{i}y$ où x et y sont réels, tels que le point M' associé soit sur l'axe des réels.
4. Dans le plan complexe, représenter les points A et B ainsi que l'ensemble $\mathcal{E}$.

Exercice 10:
On donne le nombre complexe $\mathrm{j} = -\dfrac{1}{2} + \mathrm{i}\dfrac{\sqrt{3}}{2}$. Le but de cet exercice est d'étudier quelques propriétés du nombre j et de mettre en évidence un lien de ce nombre avec les triangles équilatéraux.

1. a. Résoudre dans l'ensemble $\mathbb{C}$ des nombres complexes l'équation

$$z^2 + z + 1 = 0.$$

   b. Vérifier que le nombre complexe j est une solution de cette équation.
2. Déterminer le module et un argument du nombre complexe j, puis donner sa forme exponentielle.
3. Démontrer les égalités suivantes :
   a. $j^3 = 1$
   b. $j^2 = -1 - j$
4. On note P, Q, R les images respectives des nombres complexes 1, j et j^2 dans le plan. Quelle est la nature du triangle PQR ? Justifier la réponse.