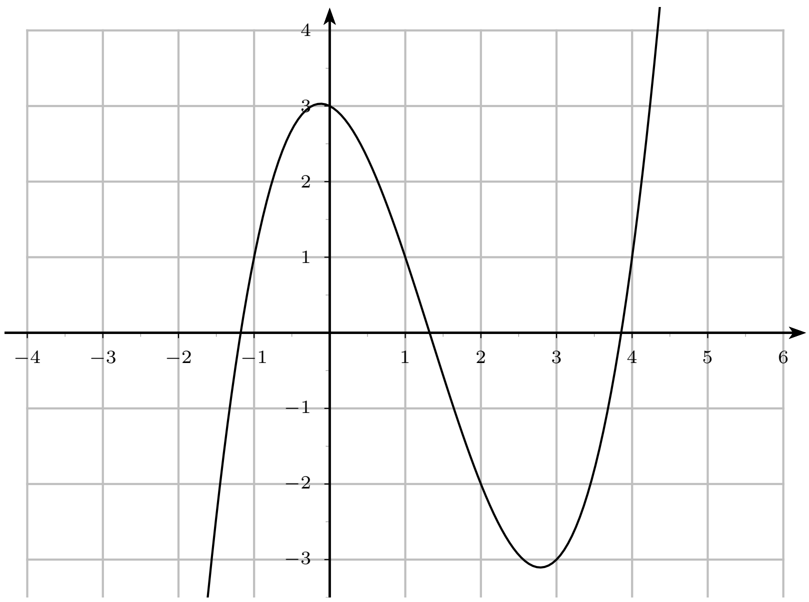
Théorème des valeurs intermédiaires et conséquences...

On donne la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par
$$f(x) = \frac{1}{2}x^3 - 2x^2 - \frac{1}{2}x + 3$$
et dont la représentation graphique est donnée ci-dessous :



1. Déterminer les variations de f sur $\mathbb{R}$.
2. La fonction f est-elle continue sur $\mathbb{R}$?

Théorème: (Des valeurs intermédiaires)
Soit f une fonction continue sur un intervalle I contenant a et b avec $a < b$.
Pour tout réel k compris entre $f(a)$ et $f(b)$, il existe au moins un réel c de $[a; b]$ tel que $f(c) = k$.

3. a. 0 admet-il un antécédent par la fonction f sur $[-2; 5]$?
   b. 0 admet-il un antécédent par la fonction f sur $[0; 2]$?
   c. Que remarque t'on ?

Corollaire:
Si f est une fonction continue et strictement monotone sur $[a; b]$, alors pour tout réel k compris entre $f(a)$ et $f(b)$, l'équation $f(x) = k$ a une solution unique dans $[a; b]$.

4. a. 0 admet-il un antécédent par la fonction f sur $[0; 2]$?
   b. 0 admet-il un antécédent par la fonction f sur $[3; 5]$?
   c. 0 admet-il un antécédent par la fonction f sur $[-2; -1]$?
5. Démontrer le corollaire du théorème des valeurs intermédiaires.
6. Montrer que l'équation $1 + x + x^2 + x^3 = 0$ admet une unique solution sur $\mathbb{R}$.
7. Montrer que l'équation $1 + x + x^2 = x^3$ admet une unique solution sur $\mathbb{R}$.