Chapitre 8: Continuité

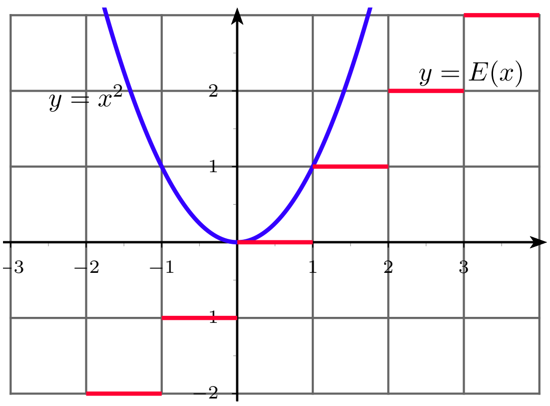
1 Continuité d'une fonction

Définition:
f est une fonction définie sur un intervalle I et a est un nombre réel appartenant à I. On dit que :

- *f est continue a si f a une limite finie en a telle que $\lim_{x \to a} f(x) = f(a)$;*
- *f est continue sur l'intervalle I si f est continue en tout nombre de I.*

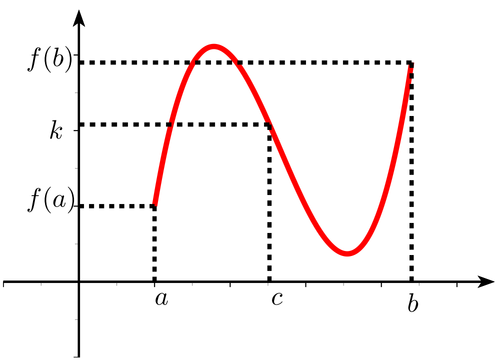
Remarque:
Une fonction définie sur un intervalle I est continue sur I si sa courbe représentative ne présente aucune rupture (on peut la tracer sans lever le crayon de la feuille).

Exemple:
La fonction $x \longmapsto x^2$ est continue sur $\mathbb{R}$ alors que la fonction $x \longmapsto E(x)$ n'est pas continue sur $\mathbb{R}$:

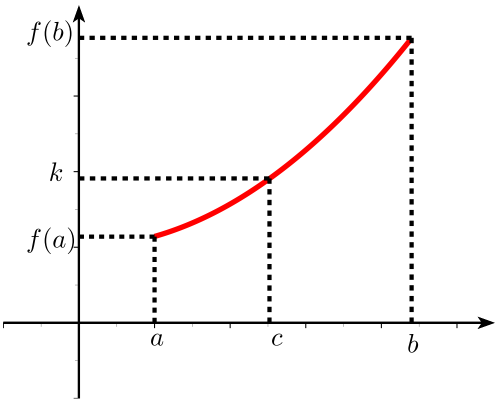


2 Théorème des valeurs intermédiaires

Théorème: (des valeurs intermédiaires)
f est une fonction continue sur un intervalle $[a;b]$. Pour tout nombre k compris entre $f(a)$ et $f(b)$, il existe au moins un nombre c compris entre a et b tel que $f(c) = k$.



Corollaire:
Si f est une fonction continue et strictement monotone sur $[a;b]$, alors pour tout réel k compris entre $f(a)$ et $f(b)$, l'équation $f(x) = k$ a une solution unique dans $[a;b]$.



Démonstartion:
L'existence de la solution est assurée par le théorème des valeurs intermédiaires. Supposons qu'on ait deux solutions distinctes x_0 *et* x_1.
D'une part $f(x_0) = k = f(x_1)$ *et d'autre part comme* $x_0 \neq x_1$ *(par exemple* $x_0 < x_1$*) alors* $f(x_0) \neq f(x_1)$ *car* f *est strictement monotone.*
L'hypothèse de départ est fausse, on ne peut pas avoir deux solutions distinctes et il n'existe donc qu'une unique solution à l'équation.

Remarque:
Il existe des extensions à ce corollaire dans le cas d'intervalles ouverts ou semi-ouverts à l'aide des limites. Voir les exemples en exercice.