

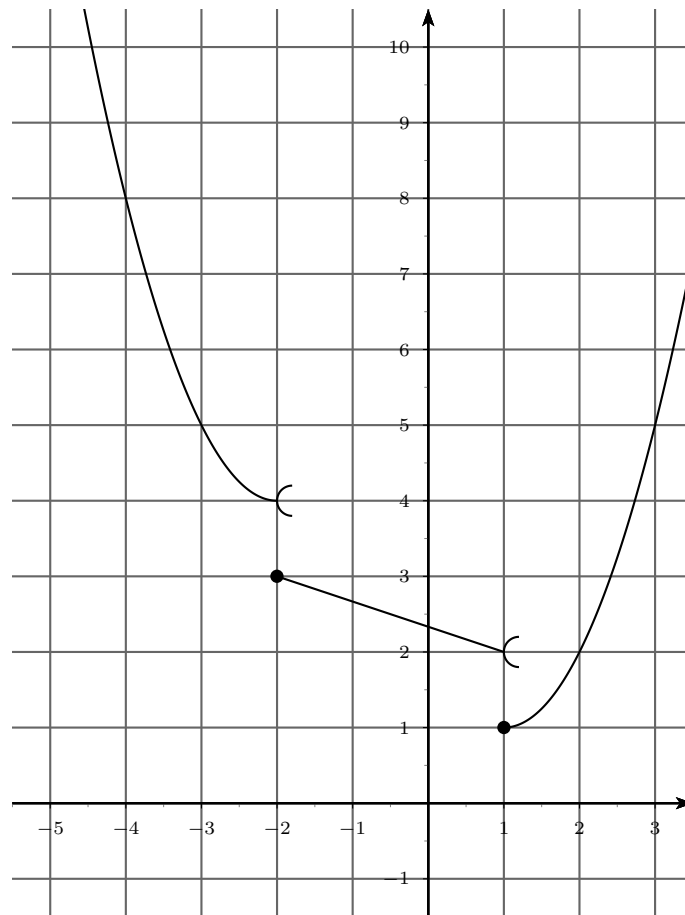
Une histoire de continuité

1 Une fonction définie par morceaux

On donne la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par

$$f(x) = \begin{cases} x^2 + 4x + 8 & \text{si } x \in]-\infty ; -2[\\ -\frac{1}{3}x + \frac{7}{3} & \text{si } x \in [-2 ; 1[\\ x^2 - 2x + 2 & \text{si } x \in [1 ; +\infty[\end{cases}$$

et dont la représentation graphique est donnée ci-dessous :



1. a. Déterminer graphiquement $f(-4)$, $f(-1)$, $f(3)$, $f(-2)$ et $f(1)$.
b. Retrouver ces images par le calcul.
2. a. Déterminer $f(-2)$, $\lim_{x \rightarrow -2^-} f(x)$ et $\lim_{x \rightarrow -2^+} f(x)$. Que remarque-t-on ?
b. Reprendre la question précédente pour $f(1)$, $\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x)$ et $\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x)$.
c. Était-ce prévisible en observant le graphique ?

On dit que la fonction f n'est pas continue en -2 et 1 .

3. À votre avis, existe-t-il d'autres valeurs de x pour lesquelles les limites à droite et à gauche sont différentes ?

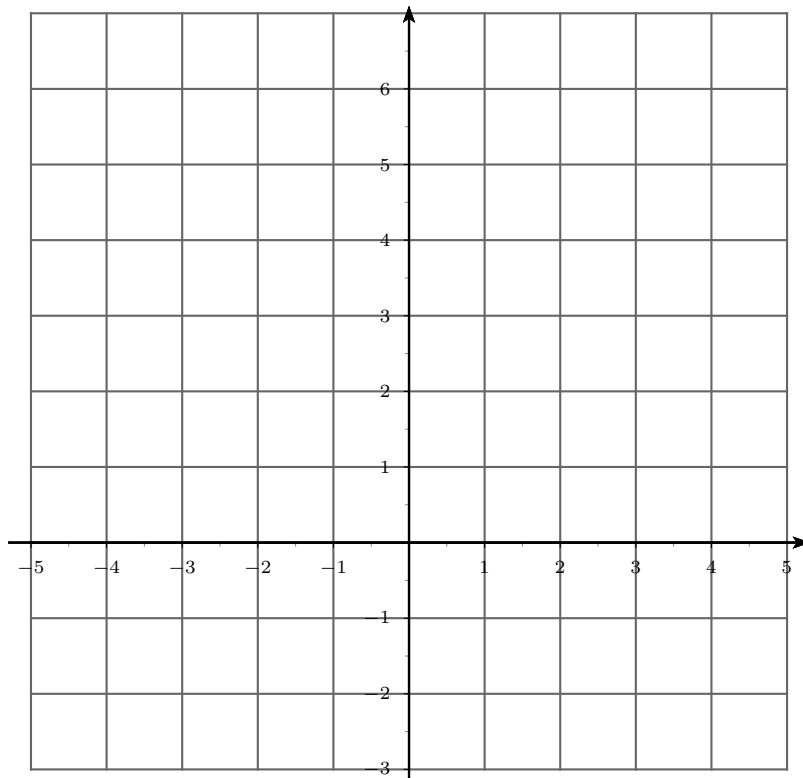
On dit que la fonction f est continue en toutes les valeurs de x différentes de -2 et 1 .

2 Continue ou non ?

Soit g la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$g(x) = \begin{cases} x^2 + 4x + 2 & \text{si } x \in]-\infty ; 0] \\ -x^2 + 4x + 2 & \text{si } x \in]0 ; 3] \\ -x^2 + 6x - 4 & \text{si } x \in]3 ; +\infty[\end{cases}.$$

1. En quelles valeurs de x les limites à droite et à gauche de la fonction g peuvent-elles éventuellement être différentes ?
2. Tracer la courbe représentative de la fonction g sur le graphique ci-dessous :



3. a. D'après le graphique, quelles conjectures peut-on faire sur les limites à droite et à gauche en les valeurs trouvées à la question 1 ?
b. Calculer ces limites.
4. Que peut-on dire sur la continuité de la fonction g ?

3 À vous de jouer

On donne la fonction h définie sur $\mathbb{R}$ par $h(x) = \begin{cases} x^2 + 5x + 3 & \text{si } x \in]-\infty ; -2[\\ \dots\dots\dots & \text{si } x \in [-2 ; 1] \\ 2x^2 - 3x + 2 & \text{si } x \in]1 ; +\infty[\end{cases}.$

1. Calculer $\lim_{x \rightarrow -2^-} h(x)$ et $\lim_{x \rightarrow 1^+} h(x)$.
2. On suppose que l'expression de $h(x)$ sur $[-2 ; 1]$ est de la forme $ax + b$.
Trouver cette expression pour que h soit continue en -2 et 1 .
3. On suppose maintenant que l'expression de $h(x)$ sur $[-2 ; 1]$ est de la forme $ax^2 + bx + c$.
Trouver cette expression pour que h soit continue en -2 et 1 et que sa courbe passe par l'origine.