DEVOIR BILAN 5		
Enseignants : SECHER P.. GREAU D.	**Nom** : **Prénom** :	**Note** :
Date : 12/05/2017	**Classe** :	**Durée** : 3 heures

Exercice 1: 5 points

Répondre à chacune des affirmations ci-dessous par Vrai ou Faux en justifiant la réponse. Toute réponse non justifiée ne sera pas prise en compte.
Les trois questions sont indépendantes l'une de l'autre.

1. La durée de vie T (exprimée en années) d'un appareil électronique suit la loi exponentielle de paramètre λ où $\lambda > 0$. On sait qu'un tel appareil a une durée de vie moyenne de quatre ans qui correspond à $E(T)$. La probabilité que cet appareil fonctionne deux années de plus sachant qu'il a déjà fonctionné trois ans est d'environ $0,39$ à $0,01$ près.
2. L'équation $z^3 - 3z^2 + 3z = 0$ admet trois solutions dans l'ensemble des nombres complexes $\mathbb{C}$.
3. Des étudiants d'une université se préparent à passer un examen pour lequel quatre thèmes (A, B, C et D) sont au programme. Le thème A est pour beaucoup d'étudiants une partie du programme difficile à maitriser. Un stage de préparation est alors proposé pour travailler ce thème. Lors de l'examen, on a constaté que s'il y a un exercice portant sur le thème A :
   - $30\,\%$ des étudiants n'ayant pas suivi le stage ne traitent pas l'exercice ;
   - $\dfrac{5}{6}$ des étudiants ayant suivi le stage l'ont traité.

   On sait de plus que $20\,\%$ des étudiants participent au stage. La probabilité qu'un étudiant ait suivi le stage sachant qu'il n'a pas du tout traité le thème A lors de l'examen est de $\dfrac{5}{41}$.

Exercice 2: 7 points

L'espace est muni d'un repère orthonormé $(O\ ;\ I,\ J,\ K)$. On considère les points

$$\mathrm{A}(-1\ ;\ -1\ ;\ 0),\ \mathrm{B}(6\ ;\ -5\ ;\ 1),\ \mathrm{C}(1\ ;\ 2\ ;\ -2) \text{ et } \mathrm{S}(13\ ;\ 37\ ;\ 54).$$

1. a. Justifier que les points A, B et C définissent bien un plan.

   b. Prouver que le vecteur $\overrightarrow{n}\begin{pmatrix}5\\16\\29\end{pmatrix}$ est un vecteur normal au plan (ABC).

   c. En déduire une équation cartésienne du plan (ABC).
2. a. Déterminer la nature du triangle ABC.

   b. Démontrer que la valeur exacte de l'aire du triangle ABC est, en unités d'aire, $\dfrac{\sqrt{1\,122}}{2}$.
3. a. Prouver que les points A, B, C et S ne sont pas coplanaires.

   b. La droite (Δ) perpendiculaire au plan (ABC) passant par le point S coupe le plan (ABC) en un point noté H. Déterminer les coordonnées du point H.
4. Déterminer le volume du tétraèdre SABC.
   On rappelle que le volume d'une pyramide est donnée par :

$$\frac{Aire\ \ de\ \ la\ \ base \times hauteur}{3}.$$

Exercice 3: 8 points

On considère la fonction f définie et dérivable sur $[0\ ;\ +\infty[$ par $f(x) = x\mathrm{e}^{-x}$ et on note $\mathcal{C}_f$ sa courbe représentative dans un repère orthogonal.

Partie A

1. Justifier toutes les informations du tableau de variations de f donné ci-dessous.

x	0		1		$+\infty$
$f(x)$	0	$\nearrow$	$\frac{1}{\mathrm{e}}$	$\searrow$	0

2. Soit F la fonction définie et dérivable sur $[0\ ;\ +\infty[$ par

$$F(x) = (-x-1)\mathrm{e}^{-x}$$

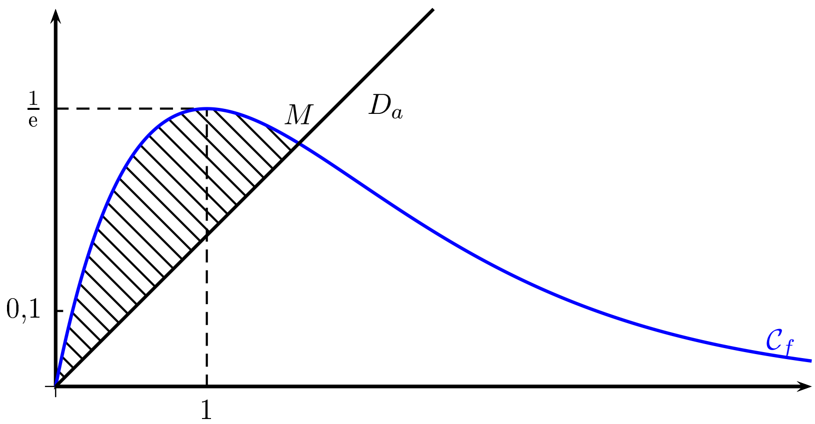
Démontrer que la fonction F est une primitive de f sur $[0\ ;\ +\infty[$.

Partie B

Soit a un nombre réel tel que $0 < a < 1$. On considère la droite D_a d'équation $y = ax$ et M le point d'intersection de la droite D_a avec la courbe $\mathcal{C}_f$. On note x_M l'abscisse du point M.

On note $\mathcal{H}(a)$ l'aire, exprimée en unités d'aire, du domaine hachuré sur le graphique ci-dessous, c'est-à-dire du domaine situé sous la courbe $\mathcal{C}_f$ au-dessus de la droite D_a et entre les droites d'équation $x = 0$ et $x = x_M$.

Le but de cette partie est d'établir l'existence et l'unicité de la valeur de a telle que $\mathcal{H}(a) = 0,5$.



1. Résoudre l'équation $f(x) = ax$ sur $]0; +\infty[$.
2. En déduire que la droite D_a et la courbe $\mathcal{C}_f$ ont un unique point d'intersection M distinct de l'origine.
3. On admet dans la suite de l'exercice que le point M a pour abscisse $x_M = -\ln a$ et que la courbe $\mathcal{C}_f$ est située au-dessus de la droite D_a sur l'intervalle $[0\ ;\ -\ln(a)]$.
   a. Montrer que $\mathcal{H}(a) = a\ln a - \frac{1}{2}a(\ln a)^2 + 1 - a$.
   b. Soit la fonction $\mathcal{H}$ définie sur $]0\ ;\ 1]$ par

$$\mathcal{H}(x) = x\ln x - \frac{1}{2}x(\ln x)^2 + 1 - x$$

   Démontrer que $\mathcal{H}'(x) = -\dfrac{1}{2}(\ln x)^2$

   On pourra utiliser le fait que $\left((\ln x)^2\right)' = 2 \times \dfrac{1}{x} \times \ln x$

   c. En déduire les variations de $\mathcal{H}$ sur $]0\ ;\ 1]$.
   d. Déterminer $\lim\limits_{x\to 0} \mathcal{H}(x)$ et $\mathcal{H}(1)$.
   e. Justifier qu'il existe un unique réel $\alpha \in]0\ ;\ 1[$ tel que $\mathcal{H}(\alpha) = 0,5$.