

Corrigé du devoir bilan 5

Exercice 1:

5 points

1. D'après le cours, $E(T) = \frac{1}{\lambda}$ donc ici $\frac{1}{\lambda} = 4$ soit $\lambda = \frac{1}{4}$.

On cherche $P_{(T \geq 3)}(T \geq 5) = P(T \geq 2)$ puisque T suit une loi exponentielle. Or :

$$\begin{aligned}P(T \geq 2) &= e^{-\lambda \times 2} \\&= e^{-\frac{1}{4} \times 2} \\&= e^{-0,5} \\&\simeq 0,61\end{aligned}$$

L'affirmation est fausse.

2. $z^3 - 3z^2 + 3z = 0 \Leftrightarrow z(z^2 - 3z + 3) = 0 \Leftrightarrow z = 0$ ou $z^2 - 3z + 3 = 0$

L'équation $z^2 - 3z + 3 = 0$ admet après étude du discriminant deux solutions complexes conjuguées : $\frac{3 - i\sqrt{3}}{2}$ et $\frac{3 + i\sqrt{3}}{2}$. L'affirmation est vraie.

3. On nomme A l'événement « l'étudiant a traité le thème A » et S l'événement « l'étudiant a suivi le stage ». On cherche ici la probabilité $P_{\bar{A}}(S)$.

$$P_{\bar{A}}(S) = \frac{P(\bar{A} \cap S)}{P(\bar{A})}$$

D'après la formule des probabilités totales,

$$\begin{aligned}P(\bar{A}) &= P(\bar{A} \cap S) + P(\bar{A} \cap \bar{S}) \\&= P(S) \times P_S(\bar{A}) + P(\bar{S}) \times P_{\bar{S}}(\bar{A}) \\&= 0,2 \times \frac{1}{6} + 0,8 \times 0,3 \\&= \frac{41}{150}\end{aligned}$$

Ainsi,

$$\begin{aligned}P_{\bar{A}}(S) &= \frac{0,2 \times \frac{1}{6}}{\frac{41}{150}} \\&= \frac{5}{41}\end{aligned}$$

L'affirmation est vraie.

Exercice 2:

7 points

1. a. $\overrightarrow{AB}(7; -4; 1)$ et $\overrightarrow{AC}(2; 3; -2)$ ne sont pas colinéaires donc les points A, B et C définissent bien un plan.
- b. Après calculs, on a $\vec{n} \cdot \overrightarrow{AB} = 0$ et $\vec{n} \cdot \overrightarrow{AC} = 0$. Or ces deux vecteurs sont deux vecteurs directeurs du plan (ABC) donc $\vec{n}$ est un vecteur normal au plan (ABC) .
- c. $\vec{n}$ est un vecteur normal au plan (ABC) donc $(ABC) : 5x + 16y + 29z + d = 0$. Or $A \in (ABC)$ donc $5 \times (-1) + 16 \times (-1) + 29 \times 0 + d = 0$ soit $d = 21$. On en déduit que $(ABC) : 5x + 16y + 29z + 21 = 0$.
2. a. $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = 0$ donc le triangle ABC est rectangle en A. De plus, $AB = \sqrt{66}$ et $AC = \sqrt{17}$ donc ABC n'est pas isocèle.
- b. L'aire du triangle ABC rectangle en A est :

$$\begin{aligned}\mathcal{A} &= \frac{AB \times AC}{2} \\&= \frac{\sqrt{66} \sqrt{17}}{2} \\&= \frac{\sqrt{1122}}{2} \text{ u.a.}\end{aligned}$$

3. a. A, B, C et S sont coplanaires si et seulement s'il existe deux réels a et b tels que $\overrightarrow{AS} = a\overrightarrow{AB} + b\overrightarrow{AC}$. Cela nous donne le système suivant :

$$\begin{cases} 14 &= 7a + 2b \\ 38 &= -4a + 3b \\ 54 &= a - 2b \end{cases}$$

En résolvant le système composé des deux premières lignes, on obtient $a = \frac{17}{2}$ et $b = -\frac{91}{4}$. Or en remplaçant dans la deuxième ligne du système on obtient que $-4a + 3b = \frac{-409}{4} \neq 38$. On en déduit donc que A, B, C et S ne sont pas coplanaires

- b. La droite (Δ) a pour vecteur directeur $\vec{n}$ et passe par S, sa représentation paramétrique est donc :

$$\begin{cases} x &= 13 + 5t \\ y &= 37 + 16t \\ z &= 54 + 29t \end{cases}, t \in \mathbb{R}$$

Les coordonnées du point H vérifie l'équation du plan (ABC) donc :

$$5(13 + 5t) + 16(37 + 16t) + 29(54 + 29t) + 21 = 0 \iff t = -2$$

On en déduit que H a pour coordonnées $(13 + 5 \times (-2); 37 + 16 \times (-2); 54 + 29 \times (-2))$ soit $(3; 5; -4)$.

4. Le volume du tétraèdre SABC de hauteur SH et de base ABC est :

$$\begin{aligned} V &= \frac{SH \times \mathcal{A}}{3} \\ &= \frac{\sqrt{4488} \frac{\sqrt{1122}}{2}}{3} \\ &= 374 u.v. \end{aligned}$$

Exercice 3:

8 points

Partie A

1. f est dérivable sur $[0; +\infty[$ et :

$$\begin{aligned} f'(x) &= 1 \times e^{-x} + x \times (-1) \times e^{-x} \\ &= (1 - x)e^{-x} \end{aligned}$$

$e^{-x} > 0$ sur $[0; +\infty[$ donc $f'(x)$ est du signe de $1 - x$ donc :

x	0	1	$+\infty$
$f'(x)$	+	0	-
$f(x)$	0	$\frac{1}{e}$	0

Pour compléter le tableau de variations, on détermine les deux images : $f(0) = 0$ et $f(1) = 1 \times e^{-1} = \frac{1}{e}$.

On détermine ensuite la limite de f en $+\infty$ en modifiant l'expression de f puisque $e^{-x} = \frac{1}{e^x}$:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x}{e^x} = 0 \text{ par croissances comparées.}$$

2. F est une primitive de f sur $[0; +\infty[$ puisque :

$$\begin{aligned} F'(x) &= -1 \times e^{-x} + (-x - 1) \times (-1) \times e^{-x} \\ &= -e^{-x} + xe^{-x} + e^{-x} \\ &= f(x) \end{aligned}$$

Partie B

1. Sur $]0; +\infty[$:

$$\begin{aligned}
 f(x) = ax &\iff xe^{-x} = ax \\
 &\iff x(e^{-x} - a) = 0 \\
 &\iff e^{-x} - a = 0 \\
 &\iff e^{-x} = a \\
 &\iff -x = \ln a \\
 &\iff x = -\ln a
 \end{aligned}$$

2. D'après la question précédente, la droite D_a et la courbe $\mathcal{C}_f$ ont pour unique point d'intersection le point M d'abscisse $-\ln a$

3. a. La courbe $\mathcal{C}_f$ est située au-dessus de la droite D_a sur l'intervalle $[0 ; -\ln(a)]$ donc :

$$\begin{aligned}
 \mathcal{H}(a) &= \int_0^{-\ln a} f(x) - ax \, dx \\
 &= \int_0^{-\ln a} f(x) \, dx - a \int_0^{-\ln a} x \, dx \\
 &= [F(x)]_0^{-\ln a} - a \left[\frac{x^2}{2} \right]_0^{-\ln a} \\
 &= F(-\ln a) - F(0) - a \frac{(-\ln a)^2}{2} \\
 &= (\ln a - 1) e^{\ln a} - (-0 - 1) e^0 - a \frac{(-\ln a)^2}{2} \\
 &= a \ln a - a + 1 - \frac{1}{2} a (\ln a)^2
 \end{aligned}$$

b. Sur $]0 ; 1]$,

$$\begin{aligned}
 \mathcal{H}'(x) &= 1 \times \ln x + x \times \frac{1}{x} - \frac{1}{2} \times (\ln x)^2 - \frac{1}{2} x \times 2 \times \frac{1}{x} \ln x - 1 \\
 &= \ln x + 1 - \frac{1}{2} \times (\ln x)^2 - \ln x - 1 \\
 &= -\frac{1}{2} \times (\ln x)^2
 \end{aligned}$$

c. Sur $]0 ; 1]$, $(\ln x)^2 > 0$ donc $\mathcal{H}'(x) < 0$. On en déduit que $\mathcal{H}'$ est strictement décroissante sur $]0 ; 1]$.

d. $\lim_{x \rightarrow 0} x \ln x = 0$ et $\lim_{x \rightarrow 0} x (\ln x)^2 = 0$ par croissances comparées donc $\lim_{x \rightarrow 0} \mathcal{H}(x) = 1$.
 $\mathcal{H}(1) = \ln 1 - \frac{1}{2} (\ln 1)^2 + 1 - 1 = 0$

e. Sur $]0 ; 1]$, $\mathcal{H}$ est continue (car dérivable), strictement décroissante et $0,5 \in \left[\mathcal{H}(1) ; \lim_{x \rightarrow 0} \mathcal{H}(x) \right[$ donc d'après le corollaire du théorème des valeurs intermédiaires, il existe un unique réel $\alpha \in]0 ; 1[$ tel que $\mathcal{H}(\alpha) = 0,5$.