

Exercice 1:

Nouvelle-Calédonie 19 novembre 2015

Pour chaque réel a , on considère la fonction f_a définie sur l'ensemble des nombres réels \mathbb{R} par

$$f_a(x) = e^{x-a} - 2x + e^a.$$

1. Montrer que pour tout réel a , la fonction f_a possède un minimum.
2. Existe-t-il une valeur de a pour laquelle ce minimum est le plus petit possible?

Exercice 2:

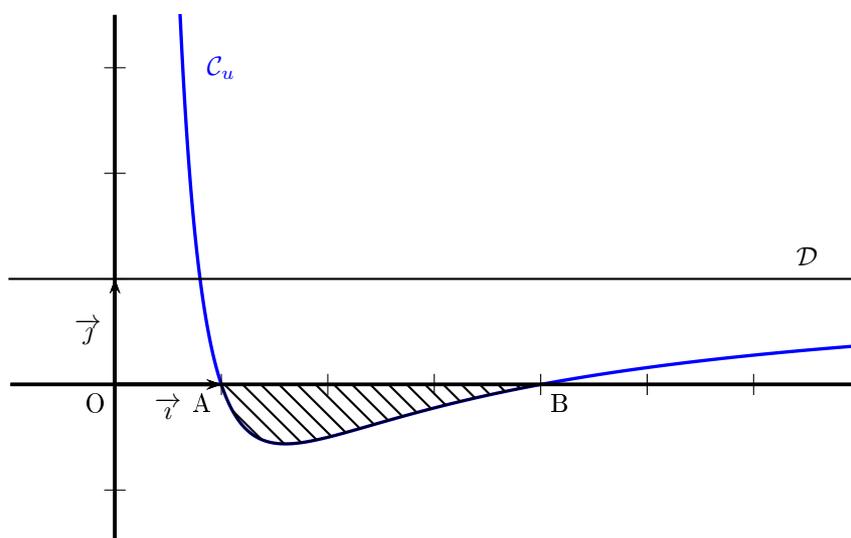
Amérique du Sud 24 novembre 2015

Partie A

Dans le plan muni d'un repère orthonormé, on désigne par \mathcal{C}_u la courbe représentative de la fonction u définie sur l'intervalle $]0; +\infty[$ par :

$$u(x) = a + \frac{b}{x} + \frac{c}{x^2}$$

où a, b et c sont des réels fixés. On a tracé sur le graphique ci-dessous la courbe \mathcal{C}_u et la droite \mathcal{D} d'équation $y = 1$.



On précise que la courbe \mathcal{C}_u passe par les points $A(1; 0)$ et $B(4; 0)$ et que l'axe des ordonnées et la droite \mathcal{D} sont asymptotes à la courbe \mathcal{C}_u .

1. Donner les valeurs de $u(1)$ et $u(4)$.
2. Donner $\lim_{x \rightarrow +\infty} u(x)$. En déduire la valeur de a .
3. En déduire que, pour tout réel x strictement positif, $u(x) = \frac{x^2 - 5x + 4}{x^2}$.

Partie B

Soit f la fonction définie sur l'intervalle $]0; +\infty[$ par $f(x) = x - 5 \ln x - \frac{4}{x}$

1. Déterminer la limite de $f(x)$ lorsque x tend vers 0. On pourra utiliser sans démonstration le fait que $\lim_{x \rightarrow 0} x \ln x = 0$.
2. Déterminer la limite de $f(x)$ lorsque x tend vers $+\infty$.
3. Démontrer que, pour tout réel x strictement positif, $f'(x) = u(x)$. En déduire le tableau de variation de la fonction f en précisant les limites et les valeurs particulières.

Partie C

1. Déterminer l'aire \mathcal{A} , exprimée en unité d'aire, du domaine hachuré sur le graphique de la **partie A**.
2. Pour tout réel λ supérieur ou égal à 4, on note \mathcal{A}_λ l'aire, exprimée en unité d'aire, du domaine formé par les points M de coordonnées $(x; y)$ telles que

$$4 \leq x \leq \lambda \quad \text{et} \quad 0 \leq y \leq u(x).$$

Existe-t-il une valeur de λ pour laquelle $\mathcal{A}_\lambda = \mathcal{A}$? Dans cette question, toute trace de recherche, même incomplète, ou d'initiative, même non fructueuse, sera prise en compte dans l'évaluation.