Éléments de correction

Exercice 1: Nouvelle-Calédonie 19 novembre 2015

1. Dans cette question, il faut comprendre que a est un paramètre et qu'il est fixé. En dérivant par rapport à x, on obtient :

$$f_a'(x) = \mathrm{e}^{x-a} - 2$$

De plus,

$$f_a'(x) = 0 \Longleftrightarrow \mathrm{e}^{x-a} - 2 = 0 \Longleftrightarrow \mathrm{e}^{x-a} = 2 \Longleftrightarrow x - a = \ln 2 \Longleftrightarrow x = a + \ln 2$$

Comme la fonction $\mathrm{e}^{x-a} - 2 = \mathrm{e}^{-a}\mathrm{e}^{x} - 2$ est croissante sur $\mathbb{R}$, on obtient :

x	$-\infty$		$a + \ln 2$		$+\infty$
$f_a'(x)$		$-$	0	$+$	
$f_a(x)$		$\searrow$	$2 - 2a - 2\ln 2 + \mathrm{e}^{a}$	$\nearrow$	

En effet,

$$\begin{aligned} f_a\left(a + \ln 2\right) &= \mathrm{e}^{a+\ln 2 - a} - 2(a + \ln 2) + \mathrm{e}^{a} \\ &= \mathrm{e}^{\ln 2} - 2a - 2\ln 2 + \mathrm{e}^{a} \\ &= 2 - 2a - 2\ln 2 + \mathrm{e}^{a} \end{aligned}$$

2. Dans cette question, on cherche la plus petite valeur possible prise par le minimum $m(a) = 2 - 2a - 2\ln 2 + \mathrm{e}^{a}$ en fonction de a. C'est à dire que a devient la variable ! On a :

$$m'(a) = -2 + \mathrm{e}^{a}$$

De plus,

$$m'(a) = 0 \Longleftrightarrow -2 + \mathrm{e}^{a} = 0 \Longleftrightarrow \mathrm{e}^{a} = 2 \Longleftrightarrow a = \ln 2$$

Comme la fonction $-2 + \mathrm{e}^{a}$ est croissante sur $\mathbb{R}$, on obtient :

x	$-\infty$		$\ln 2$		$+\infty$
$m'(a)$		$-$	0	$+$	
$m(a)$		$\searrow$	$4 - 4\ln 2$	$\nearrow$	

En effet,

$$\begin{aligned} m\left(\ln 2\right) &= 2 - 2\ln 2 - 2\ln 2 + \mathrm{e}^{\ln 2} \\ &= 2 - 4\ln 2 + 2 \\ &= 4 - 4\ln 2 \end{aligned}$$

Ainsi ce minimum est le plus petit possible pour $a = \ln 2$.

Exercice 2: Amérique du Sud 24 novembre 2015

Partie A

1. La courbe $\mathcal{C}_u$ passe par les points A$(1\,;\,0)$ et B$(4\,;\,0)$ donc $u(1) = 0$ et $u(4) = 0$.
2. La droite $\mathcal{D}$ d'équation $y = 1$ est une asymptote à la courbe $\mathcal{C}_u$ donc $\lim\limits_{x\to+\infty} u(x) = 1$.

   Or $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{b}{x} = 0$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{c}{x^2} = 0$ donc $\lim\limits_{x\to+\infty} u(x) = a$. On en déduit que $a = 1$.
3. Pour tout réel x strictement positif,

$$\left\{\begin{array}{lcl} u(1) &=& 0 \\ u(4) &=& 0 \end{array}\right. \Longleftrightarrow \left\{\begin{array}{rcl} 1 + \dfrac{b}{1} + \dfrac{c}{1} &=& 0 \\ 1 + \dfrac{b}{4} + \dfrac{c}{16} &=& 0 \end{array}\right. \Longleftrightarrow \left\{\begin{array}{lcl} b &=& -5 \\ c &=& 4 \end{array}\right.$$

Ainsi, pour tout réel x strictement positif, $u(x) = 1 - \dfrac{5}{x} + \dfrac{4}{x^2}$ soit $u(x) = \dfrac{x^2 - 5x + 4}{x^2}$.

Partie B

1. Pour $x > 0$,
$$x - 5\ln x - \frac{4}{x} = \frac{x^2 - 5x\ln x - 4}{x}$$
Or $\lim\limits_{x \to 0} x^2 - 5x\ln x - 4 = 0 - 5 \times 0 - 4 = -4$ et $\lim\limits_{x \to 0^+} x = 0^+$ donc $\lim\limits_{x \to 0} f(x) = -\infty$
2. Pour $x > 0$,
$$x - 5\ln x - \frac{4}{x} = x\left(1 - 5 \times \frac{\ln x}{x}\right) - \frac{4}{x}$$
Or $\lim\limits_{x \to +\infty} 1 - 5 \times \dfrac{\ln x}{x} = 1 - 5 \times 0 = 1$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} -\dfrac{4}{x} = 0$ donc $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$
3. Pour tout réel x strictement positif,
$$\begin{aligned} f'(x) &= 1 - 5 \times \frac{1}{x} - 4 \times \left(-\frac{1}{x^2}\right) \\ f'(x) &= 1 - \frac{5}{x} + \frac{4}{x^2} \\ f'(x) &= u(x) \end{aligned}$$
Après étude du discriminant, on obtient que $x^2 - 5x + 4$ est un polynôme du second degré qui s'annule en 1 et en 4 avec $a > 0$ donc :

x	0		1		4		$+\infty$
x^2	0	$+$		$+$		$+$	
$x^2 - 5x + 4$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$f'(x)$	$\Vert$	$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$	$\Vert\ -\infty$	$\nearrow$	-3	$\searrow$	$3 - 5\ln 4$	$\nearrow$	$+\infty$

Partie C

1. D'après la question précédente de la partie B, $u(x) \leq 0$ sur $[1; 4]$ donc :
$$\begin{aligned} \mathcal{A} &= -\int_1^4 u(x)\mathrm{d}x \\ \mathcal{A} &= -\left[f(x)\right]_1^4 \\ \mathcal{A} &= -f(4) + f(1) \\ \mathcal{A} &= -(3 - 5\ln 4) - 3 \\ \mathcal{A} &= 5\ln 4 - 6\,u.a. \end{aligned}$$
2. D'après la question précédente de la partie B, $u(x) \geq 0$ sur $[4; +\infty[$ donc :
$$\begin{aligned} \mathcal{A}_\lambda &= \int_4^\lambda u(x)\mathrm{d}x \\ \mathcal{A}_\lambda &= \left[f(x)\right]_4^\lambda \\ \mathcal{A}_\lambda &= f(\lambda) - f(4) \\ \mathcal{A}_\lambda &= \lambda - 5\ln\lambda - \frac{4}{\lambda} - 3 + 5\ln 4 \end{aligned}$$
Pour $\lambda = 4$, $\mathcal{A}_\lambda = 0$ et $\lim\limits_{\lambda \to +\infty} f(\lambda) = +\infty$. De plus, la fonction $\mathcal{A}_\lambda$ est dérivable (d'où **continue**) pour $\lambda \geq 4$ de dérivée $u(\lambda) \geq 0$ sur $[4; +\infty[$ donc $\mathcal{A}_\lambda$ est **croissante** sur $[4; +\infty[$. Comme $\mathcal{A} \in \left[\mathcal{A}_0; \lim\limits_{\lambda \to +\infty} A_\lambda\right[$, en appliquant le corollaire du théorème des valeurs intermédiaires, on démontre qu'il existe une unique valeur de λ pour laquelle $\mathcal{A}_\lambda = \mathcal{A}$.
A la calculatrice, on obtient :
$$\lambda \simeq 7,76$$