Exercice 1: Polynésie 10 juin 2016

Soit u la suite définie par $u_0 = 2$ et, pour tout entier naturel n, par $u_{n+1} = 2u_n + 2n^2 - n$.

On considère également la suite v définie, pour tout entier naturel n, par $v_n = u_n + 2n^2 + 3n + 5$.

1. Voici un extrait de feuille de tableur :

	A	B	C
1	n	u	v
2	0	2	7
3	1	4	14
4	2	9	28
5	3	24	56
6	4	63	
7			
8			
9			
10			

   Quelles formules a-t-on écrites dans les cellules C2 et B3 et copiées vers le bas pour afficher les termes des suites u et v ?

2. Déterminer, en justifiant, une expression de v_n et de u_n en fonction de n uniquement.

Exercice 2: Liban 31 mai 2016

On considère la fonction f définie sur l'intervalle $[0\,;\,1]$ par : $f(x) = \dfrac{1}{1+\mathrm{e}^{1-x}}$.

Partie A

1. Étudier le sens de variation de la fonction f sur l'intervalle $[0\,;\,1]$.
2. Démontrer que pour tout réel x de l'intervalle $[0\,;\,1]$, $f(x) = \dfrac{\mathrm{e}^x}{\mathrm{e}^x + \mathrm{e}}$ (on rappelle que $\mathrm{e} = \mathrm{e}^1$).
3. Montrer alors que $\displaystyle\int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x = \ln(2) + 1 - \ln(1+\mathrm{e})$.

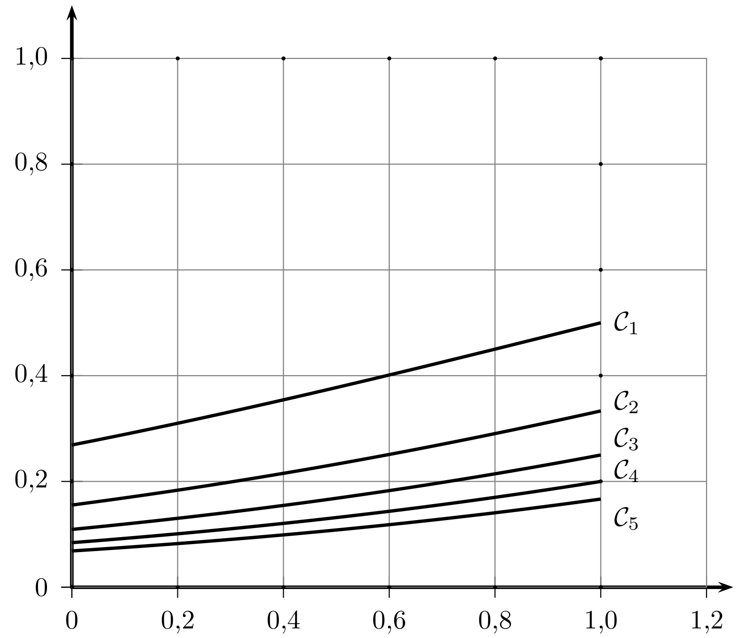
Partie B

Soit n un entier naturel. On considère les fonctions f_n définies sur $[0\,;\,1]$ par : $f_n(x) = \dfrac{1}{1+n\mathrm{e}^{1-x}}$.

On note $\mathcal{C}_n$ la courbe représentative de la fonction f_n dans le plan muni d'un repère orthonormé.

On considère la suite de terme général $u_n = \displaystyle\int_0^1 f_n(x)\,\mathrm{d}x$.

1. On a tracé ci-dessous les courbes représentatives des fonctions f_n pour n variant de 1 à 5. Compléter le graphique en traçant la courbe $\mathcal{C}_0$ représentative de la fonction f_0.



2. Soit n un entier naturel, interpréter graphiquement u_n et préciser la valeur de u_0.
3. Quelle conjecture peut-on émettre quant au sens de variation de la suite (u_n) ?
   Démontrer cette conjecture.
4. La suite (u_n) admet-elle une limite ?

Exercice 3: Liban 31 mai 2016

On considère la suite (z_n) de nombres complexes définie pour tout entier naturel n par :

$$\left\{\begin{array}{lcl} z_0 & = & 0 \\ z_{n+1} & = & \dfrac{1}{2}\mathrm{i} \times z_n + 5 \end{array}\right.$$

Dans le plan rapporté à un repère orthonormé, on note M_n le point d'affixe z_n.
On considère le nombre complexe $z_{\mathrm{A}} = 4 + 2\mathrm{i}$ et A le point du plan d'affixe z_{A}.

1. Soit (u_n) la suite définie pour tout entier naturel n par $u_n = z_n - z_{\mathrm{A}}$.
   (a) Montrer que, pour tout entier naturel n, $u_{n+1} = \dfrac{1}{2}\mathrm{i} \times u_n$.
   (b) Démontrer que, pour tout entier naturel n :
   $$u_n = \left(\frac{1}{2}\mathrm{i}\right)^n (-4 - 2\mathrm{i}).$$
2. Démontrer que, pour tout entier naturel n, les points A, M_n et M_{n+4} sont alignés.