Exercice 1: Nouvelle Calédonie mars 2016

1. Le point A$(1\,;\,1\,;\,1)$ appartient au plan P_m si et seulement si

$$\frac{1}{4}m^2x_{\mathrm{A}}+(m-1)y_{\mathrm{A}}+\frac{1}{2}mz_{\mathrm{A}}-3=0 \iff \frac{1}{4}m^2+(m-1)+\frac{1}{2}m-3=0 \iff \frac{1}{4}m^2+\frac{3}{2}m-4=0 \iff m^2+6m-16=0$$

$\Delta=36+64=100$ donc cette équation admet deux solutions $m'=\dfrac{-6+10}{2}=2$ et $m''=\dfrac{-6-10}{2}=-8$.
Le point A appartient au plan P_m pour $m=2$ ou $m=-8$.

2. Le plan P_1 a pour équation $\frac{1}{4}x+\frac{1}{2}z-3=0$ ou encore $x+2z-12=0$. Le plan P_{-4} a pour équation $4x-5y-2z-3=0$.

$\boxed{\text{Méthode 1}}$ On cherche l'intersection de ces deux plans.

$$\left\{\begin{array}{rcl} x+2z-12 &=& 0\\ 4x-5y-2z-3 &=& 0\end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{rcl} x &=& 12-2z\\ -5y &=& -4(12-2z)+2z+3\end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{rcl} x &=& 12-2z\\ -5y &=& -48+8z+2z+3\end{array}\right.$$

En posant $z=t$, on peut dire que les plans P_1 et P_{-4} sont sécants selon la droite (d) de représentation paramétrique

$$\left\{\begin{array}{rcl} x &=& 12-2t\\ y &=& 9-2t\\ z &=& t\end{array}\right. \quad \text{avec } t\in\mathbb{R}$$

$\boxed{\text{Méthode 2}}$ On montre que la représentation paramétrique de (d) est solution des équations cartésiennes des plans P_1 et P_{-4}.

3. a. Le plan P_0 a pour équation $-y-3=0$. Pour déterminer l'intersection du plan P_0 et de la droite (d), on résout le système :

$$\left\{\begin{array}{rcl} x &=& 12-2t\\ y &=& 9-2t\\ z &=& t\\ -y-3 &=& 0\end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{rcl} x &=& 12-2t\\ -3 &=& 9-2t\\ z &=& t\\ y &=& -3\end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{rcl} x &=& 12-2t\\ t &=& 6\\ z &=& t\\ y &=& -3\end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{rcl} x &=& 0\\ y &=& -3\\ z &=& 6\\ t &=& 6\end{array}\right.$$

L'intersection du plan P_0 et de la droite (d) est donc le point B$\,(0\,;\,-3\,;\,6)$.

b. Le plan P_m a pour équation $\frac{1}{4}m^2x+(m-1)y+\frac{1}{2}mz-3=0$. On regarde si les coordonnées du point B vérifient l'équation du plan P_m :

$$\frac{1}{4}m^2x_{\mathrm{B}}+(m-1)y_{\mathrm{B}}+\frac{1}{2}mz_{\mathrm{B}}-3=0+(m-1)(-3)+\frac{1}{2}m\times 6-3=-3m+3+3m-3=0$$

Donc le point B appartient au plan P_m, quelle que soit la valeur du réel m.

c. Soit H$\,(a\,;\,b\,;\,c)$ un point qui appartient au plan P_m pour tout réel m. Cela signifie que les coordonnées du point H vérifient l'équation du plan pour tout réel m :

$$\frac{1}{4}m^2a+(m-1)b+\frac{1}{2}mc-3=0$$

$\boxed{\text{Méthode 1}}$ On donne à m des valeurs particulières :

- Pour $m=0$, on obtient $-b-3=0$ donc $b=-3$.
- Pour $m=2$, on obtient $a+(2-1)(-3)+c-3=0$, soit $a+c=6$.
- Pour $m=-2$, on obtient $a+(-2-1)(-3)-c-3=0$, soit $a-c=-6$.

On résout le système $\left\{\begin{array}{rcl} a+c &=& 6\\ a-c &=& -6\end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{rcl} 2a &=& 0\\ a+c &=& 6\end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{rcl} a &=& 0\\ c &=& 6\end{array}\right.$

Le point H a donc pour coordonnées $(0\,;\,-3\,;\,6)$ donc c'est le point B.
Le point B est l'unique point appartenant à tous les plans P_m quelle que soit la valeur de m.

$\boxed{\text{Méthode 2}}$ L'existence du point a été montrée en 3. b. Nous allons montrer son unicité.
On sait (question 2) que les plans P_1 et P_{-4} sont sécants selon la droite (d).
On sait (question 3. a.) que P_0 et (d) sont sécants en B.
Le point B est donc l'unique point appartenant à P_0, P_1 et P_{-4}.
Si un point appartient à P_m quel que soit m réel, alors il appartient en particulier à P_0, P_1 et P_{-4}. C'est donc l'unique point B.

4. a. Le plan P_1 a pour équation $x+2z-12=0$ donc pour vecteur normal $\overrightarrow{n}_1\ (1\,;0\,;2)$
Le plan P_{-4} a pour équation $4x-5y-2z-3=0$ donc pour vecteur normal $\overrightarrow{n}_{-4}\ (4\,;-5\,;-2)$
$\overrightarrow{n}_1.\overrightarrow{n}_{-4}=1\times 4+0+2\times(-2)=0$ donc les vecteurs sont orthogonaux.
Les plans P_1 et P_{-4} sont donc perpendiculaires.

b. Le plan P_m a pour équation $\frac{1}{4}m^2x+(m-1)y+\frac{1}{2}mz-3=0$ donc pour vecteur normal

$$\overrightarrow{n}\ \left(\frac{1}{4}m^2\,;\,m-1\,;\,\frac{1}{2}m\right)$$

Le plan $P_{m'}$ a pour équation $\frac{1}{4}m'^2x+(m'-1)y+\frac{1}{2}m'z-3=0$ donc pour vecteur normal

$$\overrightarrow{n}'\ \left(\frac{1}{4}m'^2\,;\,m'-1\,;\,\frac{1}{2}m'\right)$$

les deux plans sont perpendiculaires si et seulement si leurs vecteurs normaux sont orthogonaux :
$P_m\perp P_{m'}\iff \overrightarrow{n}\perp\overrightarrow{n}'\iff \overrightarrow{n}.\overrightarrow{n}'=0\iff \frac{1}{4}m\times\frac{1}{4}m'+(m-1)(m'-1)+\frac{1}{2}m\times\frac{1}{2}m'=0$
$\iff \left(\frac{mm'}{4}\right)^2+(m-1)(m'-1)+\frac{mm'}{4}=0$

c. On donne l'algorithme suivant :

Variables :	m et m' entiers relatifs
Traitement :	Pour m allant de -10 à 10 :
	Pour m' allant de -10 à 10 :
	Si $(mm')^2+16(m-1)(m'-1)+4mm'=0$
	Alors Afficher $(m\ ;\ m')$
	Fin du Pour
	Fin du Pour

Cet algorithme affiche tous les couples $(m\,;m')$ d'entiers compris entre -10 et 10 pour lesquels

$$\left(\frac{mm'}{4}\right)^2+(m-1)(m'-1)+\frac{mm'}{4}=0$$

c'est-à-dire pour lesquels les plans P_m et $P_{m'}$ sont perpendiculaires.

d. Cet algorithme affiche six couples d'entiers dont $(-4\ ;\ 1)$, $(0\ ;\ 1)$ et $(5\ ;\ -4)$.
Le nombres m et m' jouant le même rôle, les autres couples seront $(1\ ;\ -4)$, $(1\ ;\ 0)$ et $(-4\ ;\ 5)$.
Les six couples seront affichés dans cet ordre :

$$(-4\ ;\ 1)\,;(-4\ ;\ 5)\,;(0\ ;\ 1)\,;(1\ ;\ -4)\,;(1\ ;\ 0)\,;(5\ ;\ -4)$$

Exercice 2: Amérique du Sud 24 novembre 2015

Affirmation 1 : Les droites Δ et (AC) sont orthogonales.

En détaillant son écriture paramétrique, on peut dire que la droite Δ a pour vecteur directeur $\overrightarrow{v}\,(4\,;\,-1\,;\,2)$. La droite (AC) a pour vecteur directeur $\overrightarrow{\text{AC}}\,(1\,;\,0\,;\,-2)$.

$$\overrightarrow{v}.\overrightarrow{\text{AC}} = 4\times 1 + (-1)\times 0 + 2\times(-2) = 0$$

donc les vecteurs $\overrightarrow{v}$ et $\overrightarrow{\text{AC}}$ sont orthogonaux ; on peut en déduire que les droites Δ et (AC) sont orthogonales.
Affirmation 1 vraie

Affirmation 2 : Les points A, B et C déterminent un plan et ce plan a pour équation cartésienne $2x+5y+z-5=0$.

- Les points A, B et C déterminent un plan si et seulement s'ils ne sont pas alignés.
  $\overrightarrow{\text{AB}}$ a pour coordonnées $(-4\,;\,3\,;\,-7)$ et $\overrightarrow{\text{AC}}$ a pour coordonnées $(1\,;\,0\,;\,-2)$.
  Ces deux vecteurs ne sont pas colinéaires donc les points A, B et C ne sont pas alignes ; ils déterminent donc le plan (ABC).
- Le plan (ABC) a pour équation $2x+5y+z-5=0$ si les coordonnées des trois points A, B et C vérifient cette équation.
  - $2x_{\text{A}}+5y_{\text{A}}+z_{\text{A}}-5 = 2\times 3+5\times(-1)+4-5=0$
  - $2x_{\text{B}}+5y_{\text{B}}+z_{\text{B}}-5 = 2\times(-1)+5\times 2+(-3)-5=0$
  - $2x_{\text{C}}+5y_{\text{C}}+z_{\text{C}}-5 = 2\times 4+5\times(-1)+2-5=0$

Les coordonnées des trois points vérifient l'équation du plan donc ces points appartiennent au plan. Le plan (ABC) a pour équation $2x+5y+z-5=0$.
Affirmation 2 vraie

Affirmation 3 : Tous les points dont les coordonnées $(x\ ;\ y\ ;\ z)$ sont données par
$$\left\{\begin{array}{rcl} x &=& 1+\ \ s-2s' \\ y &=& 1-2s+\ \ s' \\ z &=& 1-4s+2s' \end{array}\right.,\ s\in\mathbb{R},\ s'\in\mathbb{R}$$
appartiennent au plan $\mathcal{P}$.
Soient s et s' deux réels et M le point de coordonnées $(1+s-2s'\,;\,1-2s+s'\,;\,1-4s+2s')$. Le plan $\mathcal{P}$ a pour équation $2x-3y+2z-7=0$.
$$\begin{aligned} 2x_{\text{M}}-3y_{\text{M}}+2z_{\text{M}}-7 &= 2(1+s-2s')-3(1-2s+s')+2(1-4s+2s')-7 \\ &= 2+2s-4s'-3+6s-3s'+2-8s+4s'-7 = -6-3s' \end{aligned}$$
n'est pas égal à 0 pour tout s'.
Affirmation 3 fausse

Affirmation 4 : Il existe un plan parallèle au plan $\mathcal{P}$ qui contient la droite Δ.
Il existe un plan parallèle au plan $\mathcal{P}$ qui contient la droite Δ si et seulement si la droite Δ est parallèle au plan $\mathcal{P}$. La droite Δ a pour vecteur directeur $\overrightarrow{v}\,(4\,;\,-1\,;\,2)$. Le plan $\mathcal{P}$ a pour vecteur normal $\overrightarrow{n}\,(2\,;\,-3\,;\,2)$. La droite Δ est parallèle au plan $\mathcal{P}$ si et seulement si les vecteurs $\overrightarrow{v}$ et $\overrightarrow{n}$ sont orthogonaux.

$$\overrightarrow{v}.\overrightarrow{n} = 4\times 2+(-1)\times(-3)+2\times 2 = 15 \neq 0$$

donc les deux vecteurs ne sont pas orthogonaux ce qui prouve que la droite Δ n'est pas parallèle au plan $\mathcal{P}$.
Affirmation 4 fausse