

# Chapitre 3: Évolution

## 1 Variation absolue et taux d'évolution

Le prix d'un litre d'essence est passé en un mois de 1,2 euros le litre à 1,32 euros le litre.

- La **variation absolue** du prix du litre d'essence est  $1,32 - 1,2$  soit 0,12 euro.
- La **variation relative** ou **taux d'évolution** du prix du litre d'essence est  $\frac{1,32 - 1,2}{1,2} = 0,1$  soit 10%.

### Définition:

On considère deux nombres réels strictement positifs  $y_1$  et  $y_2$ .

Le nombre  $y_2 - y_1$  est la **variation absolue** de  $y_1$  à  $y_2$ .

Le nombre  $t = \frac{y_2 - y_1}{y_1}$  est la **variation relative** ou **taux d'évolution** de  $y_1$  à  $y_2$ .

## 2 Coefficient multiplicateur

Par quel nombre multiplier 1,2 pour obtenir 1,32? Le nombre cherché que l'on note  $c_M$  doit vérifier :

$$1,2c_M = 1,32 \quad \text{soit} \quad c_M = \frac{1,32}{1,2} = 1,1$$

Ce nombre  $c_M$  est appelé le **coefficient multiplicateur** de  $y_1$  à  $y_2$  et on remarque que :

$$c_M = \frac{1,32}{1,2} = \frac{1,2}{1,2} + \frac{0,12}{1,2} = 1 + 0,1 = 1 + t$$

### Définition:

On considère deux nombres réels strictement positifs  $y_1$  et  $y_2$ . On appelle **coefficient multiplicateur** de  $y_1$  à  $y_2$  le nombre strictement positif tel que  $y_2 = c_M y_1$ . Ainsi :

$$c_M = \frac{y_2}{y_1} \quad \text{et} \quad c_M = 1 + t$$

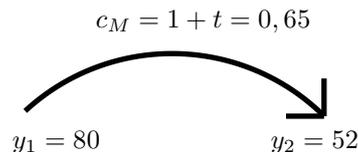
### Propriété:

Un coefficient multiplicateur strictement supérieur à 1 correspondent à une **augmentation** (ou une **hausse**).

Un coefficient multiplicateur strictement inférieur à 1 correspondent à une **diminution** (ou une **baisse**).

### Exemple:

Un jeans vendu 80 euros voit son prix baissé de 35% lors d'une opération commerciale. Le prix du jeans a baissé et  $-0,35$  est le taux d'évolution du prix donc  $c_M = 1 - 0,35 = 0,65$ . On en déduit que son nouveau prix est de  $80 \times 0,65 = 52$  euros.



## 3 Évolutions successives

### Propriété:

Pour deux évolutions successives, de  $y_1$  à  $y_2$  (de taux  $t_1$ ) puis de  $y_2$  à  $y_3$  (de taux  $t_2$ ), l'évolution de  $y_1$  à  $y_3$  (de taux  $t$ ) a pour coefficient multiplicateur le produit des coefficients multiplicateurs :

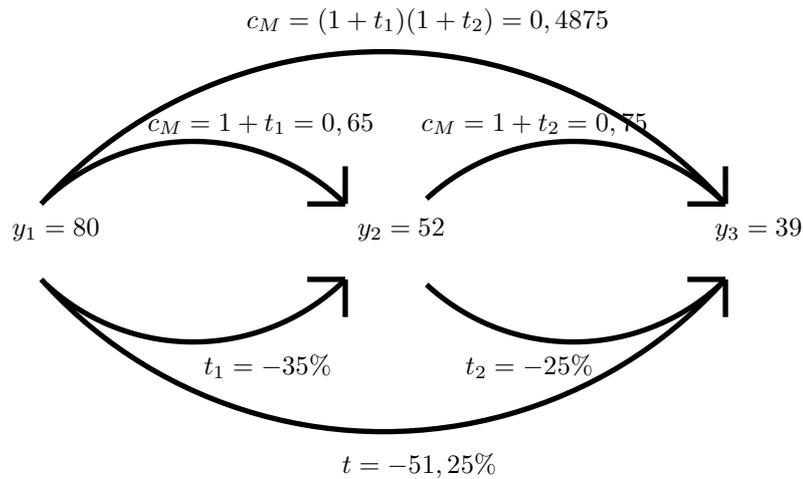
$$1 + t = (1 + t_1)(1 + t_2)$$

Ainsi le taux d'évolution de  $y_1$  à  $y_3$  est :

$$t = (1 + t_1)(1 + t_2) - 1$$

**Exemple:**

Un jeans vendu 80 euros voit son prix baissé de 35% lors d'une première opération commerciale puis encore de 25% lors d'une seconde opération commerciale.



Le prix du jeans a été multiplié par 0,4875 ce qui correspond à une baisse de  $0,4875 - 1 = -0,5125$  soit  $-51,25\%$ . Le nouveau prix est de 39 euros.

## 4 Évolution réciproque

**Propriété:**

Pour une évolution de  $y_1$  à  $y_2$  (de taux  $t$ ), l'évolution de réciproque  $y_2$  à  $y_1$  (de taux  $t'$ ) a pour coefficient multiplicateur l'inverse du coefficient multiplicateur de  $y_1$  à  $y_2$  :

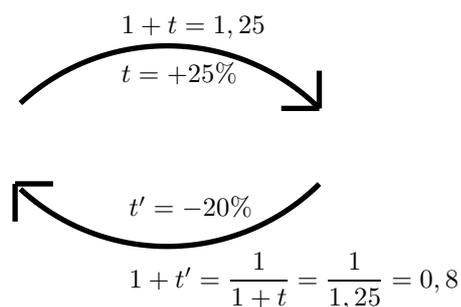
$$1 + t' = \frac{1}{1 + t}$$

Ainsi le taux d'évolution de  $y_2$  à  $y_1$  est :

$$t' = \frac{1}{1 + t} - 1$$

**Exemple:**

Un prix augmente de 25%. Pour revenir à sa valeur initiale, ce prix devra baisser de 20% et pas de 25% ! En effet :



## 5 Taux d'évolution moyen

### Définition:

Soit  $a$  un nombre réel positif et  $n$  un entier naturel non-nul. L'équation

$$x^n = a$$

admet une unique solution positive, notée :

$$x = a^{\frac{1}{n}}$$

Cette solution s'appelle la **racine  $n$ -ième de  $a$** .

### Exemple:

On cherche le nombre positif  $x$  tel que  $x^5 = 8$ . La solution est  $x = 8^{\frac{1}{5}} \simeq 1,516$

### Définition:

Une quantité est multiplié pendant  $n$  périodes par le même coefficient multiplicateur inconnu  $c_M$ . Au bout de ces  $n$  périodes le coefficient multiplicateur global  $c_G$  et vérifie :

$$c_G = \underbrace{c_M \times c_M \times \cdots \times c_M}_{n \text{ fois}} = c_M^n$$

Ainsi le coefficient multiplicateur moyen par période est égale à :

$$c_M = c_G^{\frac{1}{n}}$$

### Exemple:

Le prix du litre de lait payé au producteur de lait a baissé sur une année de 13,7%. Le coefficient multiplicateur correspondant à cette baisse est  $1 - 0,137 = 0,863$ . Ainsi le coefficient multiplicateur moyen de l'évolution mensuel du prix du lait est :

$$0,863^{\frac{1}{12}} \simeq 0,988$$

Or  $0,988 - 1 = -0,012$  donc le prix du litre de lait a baissé en moyenne de 1,2% par mois pendant l'année.