Chapitre 4: Étude de fonctions II

1 Dérivée de la fonction inverse

Théorème:
La fonction inverse est la fonction définie pour tout réel $x \neq 0$ par $x \longmapsto \frac{1}{x}$. Cette fonction est dérivable sur $\mathbb{R}^\star$ et a pour fonction dérivée $f'(x) = -\frac{1}{x^2}$

Exercice:
Déterminer la fonction dérivée de $f(x) = 4x^2 + \frac{1}{x}$.

Déterminer la fonction dérivée de $g(x) = -3 - x - \frac{2}{x}$.

2 Dérivée d'une fonction quotient

Théorème:
Soit f une fonction définie sur I comme le quotient de deux fonctions dérivables u et v sur I (avec $v(x) \neq 0$ sur I) :

$$f(x) = \frac{u(x)}{v(x)}$$

La fonction f est alors dérivable sur I et :

$$f'(x) = \frac{u'(x)v(x) - u(x)v'(x)}{[v(x)]^2}$$

Exemple:
Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}\setminus\{5\}$ par $f(x) = \frac{x^2+3x+1}{2x-10}$. f est le quotient de $u(x) = x^2+3x+1$ par $v(x) = 2x-10$.

$$\begin{array}{cc} u(x) = x^2+3x+1 & u'(x) = 2x+3 \\ v(x) = 2x-10 & v'(x) = 2 \end{array}$$

On en déduit que :

$$\begin{array}{rcl} f'(x) & = & \frac{(2x+3)((2x-10) - (x^2+3x+1)2}{(2x-10)^2} \\ f'(x) & = & \frac{4x^2-20x+6x-30-(2x^2+6x+2)}{(2x-10)^2} \\ f'(x) & = & \frac{4x^2-14x-30-2x^2-6x-2)}{(2x-10)^2} \\ f'(x) & = & \frac{2x^2-20x-32}{(2x-10)^2} \end{array}$$