En route pour le bac

Exercice 1:
Une agence lance une campagne publicitaire sur une durée de 15 semaines, dans une ville donnée, afin de promouvoir une nouvelle marque de boissons gazeuses. Une étude montre qu'après x semaines de campagne publicitaire, le pourcentage de personnes résidant dans cette ville ayant pris connaissance de la marque est donné par l'expression :

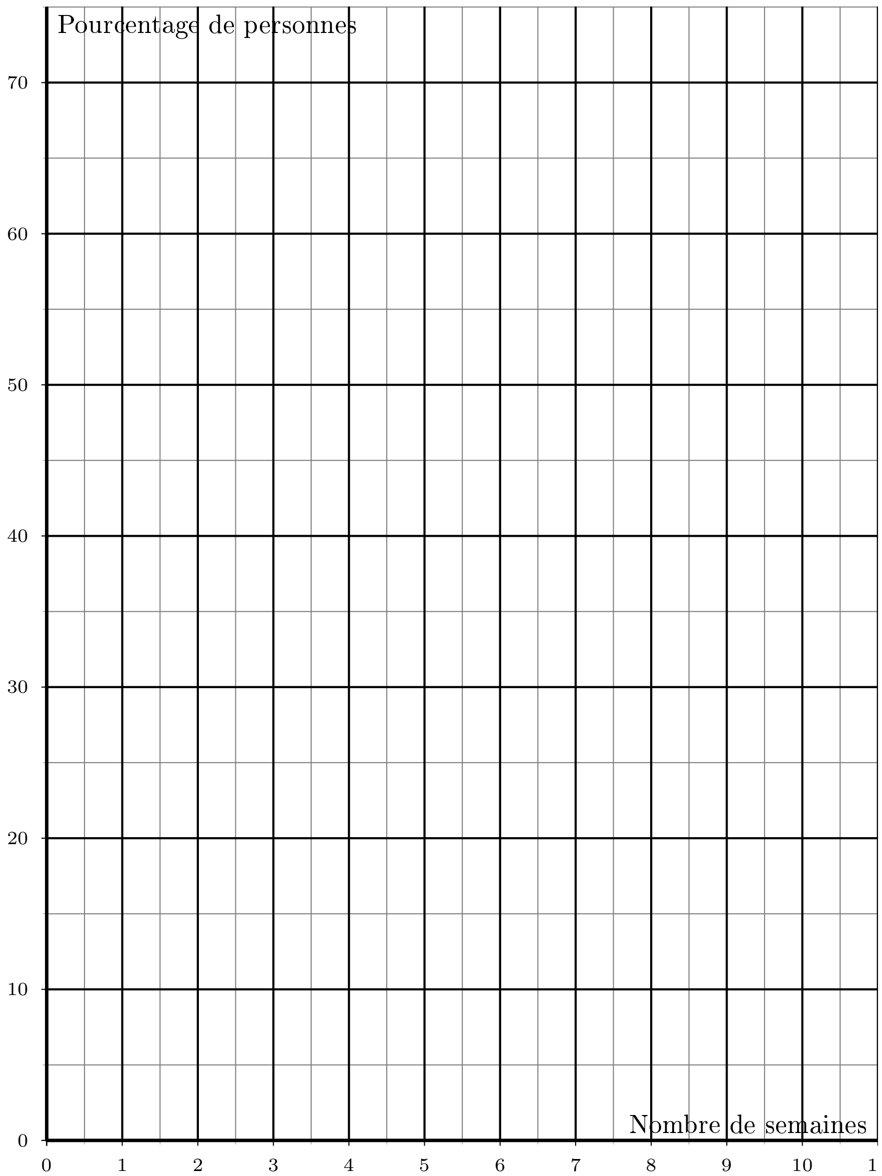
$$f(x) = \frac{75x}{x+2}$$

où x est un réel compris entre 0 et 30. L'objectif fixé à l'agence par l'entreprise qui produit cette nouvelles marque de boissons est qu'au moins 70 % des habitants de la ville aient pris connaissance de cette marque.

1. Tracer la courbe de la fonction f dans le repère ci-dessous.
2. Peut-on affirmer qu'après 10 semaines de publicité, l'objectif fixé est atteint ? Justifier la réponse.
3. Déterminer graphiquement le nombre de semaines nécessaires pour que le pourcentage d'habitants ayant pris connaissance de la marque passe de 50 % à 60 %. On laissera apparents les tracés utiles.
4. On note f' la dérivée de f. Montrer que, pour tout réel x de l'intervalle $[0\ ;\ 15]$,

$$f'(x) = \frac{150}{(x+2)^2}$$

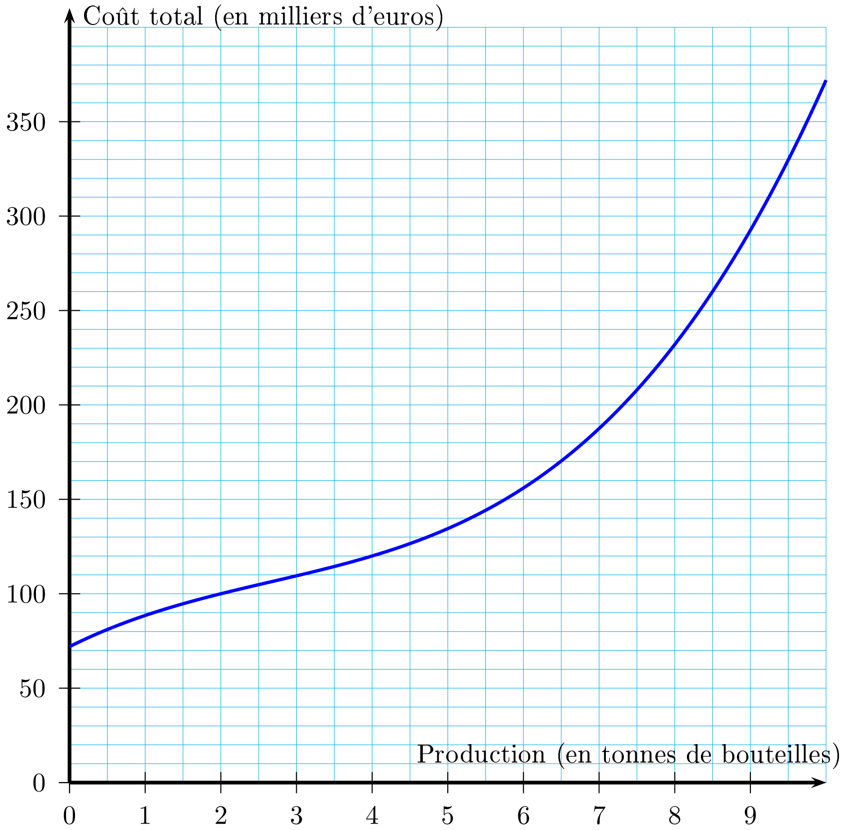
5. En utilisant le signe de sa dérivée, déterminer les variations de f sur l'intervalle $[0\ ;\ 15]$.
6. Après ces 15 semaines de campagne, l'agence demande un délai supplémentaire. Justifier cette demande.
7. Combien de semaines supplémentaires seront nécessaires à l'agence pour atteindre l'objectif fixé par l'entreprise ?
8. Déterminer l'équation de la tangente à la courbe pour $x = 3$. Tracer dans le repère cette tangente.



Exercice 2:
Une entreprise fabrique des bouteilles en verre. La production quotidienne, exprimée en tonnes, varie entre 0 et 10. Pour l'entreprise, le coût correspondant à la fabrication de x tonnes de bouteilles, exprimé en milliers d'euros, est modélisé par la fonction f définie sur l'intervalle $[0; 10]$ par :

$$f(x) = 0,5x^3 - 4x^2 + 20x + 72$$

On a représenté ci-dessous la fonction f dans un repère orthogonal du plan.



Partie A

1. Déterminer, par lecture graphique, le coût correspondant à la fabrication d'une tonne de bouteilles.
2. Déterminer, par lecture graphique, la production de bouteilles correspondant à un coût de fabrication de 130 milliers d'euros.

Partie B

On appelle coût moyen la fonction C_M définie sur l'intervalle $]0\ ;\ 10]$ par :

$$C_M(x) = \frac{f(x)}{x}$$

1. Calculer la dérivée de la fonction C_M, notée C'_M.
2. Montrer que pour tout x de l'intervalle $]0\ ;\ 10]$, $C'_M(x)$ peut s'écrire :

$$C'_M(x) = \frac{(x-6)\left(x^2+2x+12\right)}{x^2}.$$

3. Justifier que $C'_M(x)$ est du signe de $x - 6$ pour x variant dans l'intervalle $]0\ ;\ 10]$ et en déduire le tableau des variations de la fonction C_M.
4. Déterminer la production de bouteilles correspondant à un coût moyen minimal.

Partie C

L'entreprise vend ses bouteilles de verre au prix de 40 milliers d'euros la tonne.

1. On note B la fonction bénéfice, exprimée en milliers d'euros. Montrer que l'expression de $B(x)$ sur l'intervalle $[0\,;10]$ est :

$$B(x) = -0,5x^3 + 4x^2 + 20x - 72$$

2. Calculer le bénéfice associé à une production de 6,5 tonnes.
3. Que pensez-vous de l'affirmation « le bénéfice est maximal lorsque le coût moyen est minimal » ? Justifier la réponse.