# D'une épreuve de Bernoulli à la loi binomiale

**Définition:**
*Une expérience à deux issues, succès ou échec, est appelée « épreuve de Bernoulli ».*

**Exercice 1:**
Les expériences aléatoires suivantes sont-elles des épreuves de Bernoulli ? Si oui, préciser leur paramètre (si ce n'est pas clairement indiqué, vous choisirez quelle issue correspond au succès et quelle issue correspond à l'échec).

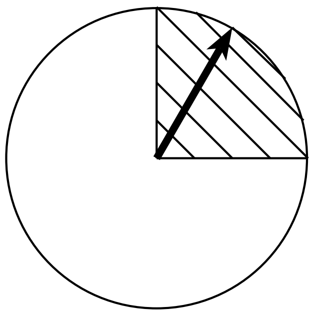
1. On lance un dé équilibré et on gagne si on fait un 6.
2. On lance un dé tétraèdrique et on regarde le résultat obtenu.
3. Un automobiliste arrive à un feu et a une probabilité de 0,3 qu'il soit vert.

**Exercice 2:**
On considère l'épreuve aléatoire : « on tire une boule dans une urne qui contient 4 boules noires et 6 boules rouges » et on s'intéresse à la sortie d'une boule noire.

1. L'expérience aléatoire suivante est-elle une épreuve de Bernoulli ?
2. Soit $X$ la variable aléatoire qui prend la valeur 1 en cas de succès et la valeur 0 en cas d'échec.
   a. Donner la loi de probabilité de $X$.
   b. Déterminer l'espérance et la variance de $X$.

**Définition:**
*La loi de Bernoulli de paramètre $p$ est la loi de la variable aléatoire qui prend la valeur $1$ en cas de succès et $0$ en cas d'échec, où $p$ désigne la probabilité du succès. Son espérance est $E(X) = p$ et sa variance est $V(X) = p(1-p)$*

**Exercice 3:**



On fait tourner la roue de loterie présentée ci-dessus : on obtient la zone grisée avec la probabilité $0,25$ et la zone blanche avec la probabilité $0,75$. Le joueur est gagnant lorsque la flèche s'arrête sur la zone grisée. On décide de noter $S$ (comme succès) cette éventualité et de noter $E$ (comme échec) l'éventualité contraire.
On joue cinq fois de suite dans des conditions identiques et on désigne par $X$ la variable aléatoire qui donne le nombre de succès obtenus.

1. Réaliser un arbre pondéré représentant cette situation.
2. Compléter le tableau ci-dessous à l'aide de l'arbre pondéré pour déterminer la loi de probabilité de $X$ :

| $x_i$ | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 |
|---|---|---|---|---|---|---|
| probabilité d'un branche qui mène à $x_i$ succès | | | | | | |
| nombre de branches qui mène à $x_i$ succès | | | | | | |
| $P(X = x_i)$ | | | | | | |

3. Déterminer la probabilité d'obtenir exactement deux succès.
4. Déterminer la probabilité d'obtenir au plus deux succès.
5. Déterminer la probabilité d'obtenir au moins deux succès.
6. Déterminer l'espérance de $X$.

**Définition:**
*Lorsqu'on répète $n$ fois la même expérience de Bernoulli de manière **indépendante**, on obtient un schéma de $n$ épreuves de Bernoulli de paramètre $p$.*
*La variable aléatoire $X$ associant à chaque issue le nombre de succès suit une **loi binomiale de paramètres** $n$ **et** $p$*

**Définition:**
*Le **nombre de chemins** de l'arbre associé à un schéma de Bernoulli d'ordre $n$ conduisant à $k$ succès pour $n$ répétitions est noté $\begin{pmatrix} n \\ k \end{pmatrix}$ et se lit « $k$ parmi $n$ ». Les nombres $\begin{pmatrix} n \\ k \end{pmatrix}$ sont appelés coefficients binomiaux.*

**Exercice 4:**
A l'aide de votre calculatrice, déterminer $\begin{pmatrix} 5 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 7 \\ 2 \end{pmatrix}$, et $\begin{pmatrix} 6 \\ 3 \end{pmatrix}$.

**Exercice 5:**
Compléter le tableau ci-dessous à l'aide de votre calculatrice :

| $n \setminus k$ | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 0 | | | | | | |
| 1 | | | | | | |
| 2 | | | | | | |
| 3 | | | | | | |
| 4 | | | | | | |
| 5 | | | | | | |