Chapitre 6: Suites I

1 Définition

Définition:
On appelle suite numérique une liste infinie ordonnée de nombres réels.

Exemple:
La suite des nombres pairs :

$$(0, 2, 4, 6, \dots)$$

Remarques:
- *Une suite est notée* (u_n).
- *Le terme d'indice* n *est noté* u_n, *on l'appelle le terme général de la suite* (u_n).
- *Il ne faut pas confondre la suite* (u_n) *et le terme général de la suite* u_n.

Exemple:
Dans l'exemple précédent, on a :

$$(u_n) = (0, 2, 4, 6, \dots)$$

Si on numérote les termes de cette suite à partir de 0, *on a :*

n	0	1	$\dots$	$n-1$	n	$n+1$	$\dots$
u_n	$u_0 = 0$	$u_1 = 2$	$\dots$	$u_{n-1} = 2(n-1)$	$u_n = 2n$	$u_{n+1} = 2(n+1)$	$\dots$

2 Variations

Définition:
Une suite (u_n) *est croissante si pour tout entier naturel* n,

$$u_n \leq u_{n+1}$$

Une suite (u_n) *est décroissante si pour tout entier naturel* n,

$$u_n \geq u_{n+1}$$

Une suite (u_n) *est constante si pour tout entier naturel* n,

$$u_n = u_{n+1}$$

3 Suites arithmétiques

Définition:
On dit qu'une suite (u_n) *est arithmétique si la différence entre deux termes consécutifs est constante, autrement dit s'il existe un réel* r *tel que pour tout entier* n, $u_{n+1} = u_n + r$. *Ce réel* r *est appelé la raison de la suite arithmétique.*

Exemples:
- *La suite des entiers naturels pairs définie sur* $\mathbb{N}$ *par* $u_n = 2n$ *est une suite arithmétique de raison* 2 *puisque :*

$$u_{n+1} - u_n = 2(n+1) - 2n = 2$$

- *La suite des carrés des entiers naturels définie sur* $\mathbb{N}$ *par* $u_n = n^2$ *n'est pas une suite arithmétique puisque :*

$$u_1 - u_0 = 1 - 0 = 1 \quad et \quad u_2 - u_1 = 4 - 1 = 3$$

Propriété:
Soit (u_n) *une suite arithmétique de raison* r *:*

- *Si* $r > 0$*, la suite* (u_n) *est strictement croissante ;*
- *Si* $r < 0$*, la suite* (u_n) *est strictement décroissante ;*
- *Si* $r = 0$*, la suite* (u_n) *est constante.*

Propriété:
Soit (u_n) *une suite arithmétique de raison* r *et de premier terme* u_0 *alors pour tout entier* n*,*

$$u_n = u_0 + nr$$

4 Suites géométriques

Définition:
On dit qu'une suite (u_n) *est géométrique s'il existe un réel* q *tel que pour tout entier* n*,* $u_{n+1} = qu_n$*. Ce réel* q *est appelé la raison de la suite géométrique.*

Exemples:

- *La suite définie sur* $\mathbb{N}$ *par* $u_n = 2^n$ *est une suite géométrique de raison* 2 *puisque :*

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{2^{n+1}}{2^n} = 2 \quad \textit{soit} \quad u_{n+1} = 2u_n$$

- *La suite des carrés des entiers naturels non-nuls définie sur* $\mathbb{N}^\star$ *par* $u_n = n^2$ *n'est pas une suite géométrique puisque :*

$$\frac{u_2}{u_1} = \frac{4}{1} = 4 \quad \textit{et} \quad \frac{u_3}{u_2} = \frac{9}{4} \neq 4$$

Propriété:
Soit (u_n) *une suite géométrique de raison* $q \geq 0$ *et de premier terme* $u_0 > 0$ *:*

- *Si* $1 < q$*, la suite* (u_n) *est strictement croissante ;*
- *Si* $q = 1$*, la suite* (u_n) *est constante ;*
- *Si* $0 < q < 1$*, la suite* (u_n) *est strictement décroissante.*

Propriété:
Soit (u_n) *une suite géométrique de raison* q *et de premier terme* u_0 *alors pour tout entier* n*,*

$$u_n = u_0 \times q^n$$