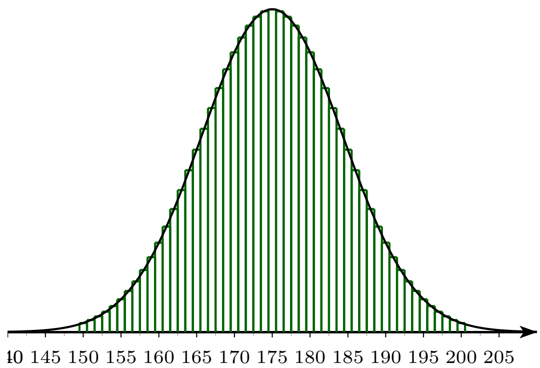
Chapitre 9: Loi normale

1 Loi normale d'espérance μ et d'écart type σ



L'étude de la taille (en centimètres) à l'age adultes des hommes en France conduit à la distribution des fréquences ci-dessus.

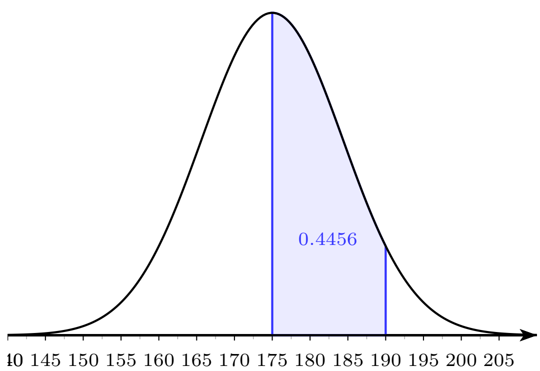
Par exemple, la hauteur du bâton correspondant à 175 est de $0,04265$. On peut en déduire que $4,625\%$ des hommes adultes en France mesure 175 centimètres.

A l'aide de cette étude, on obtient que la taille moyenne (en centimètres) à l'age adultes des hommes en France est de 175 centimètres et l'écart type est de 6 centimètres.

Une telle distribution est dite « normale » et on lisse cette distribution par la **courbe en cloche** noire, centrée en 175.

Soit X la variable aléatoire associée à la taille (en centimètres) à l'age adultes des hommes en France, selon ce modèle de loi « normale » .

Pour calculer la probabilité qu'un homme adulte mesure entre 175 et 190 centimètres, on calcule l'aire de la surface en bleu ci-dessous :

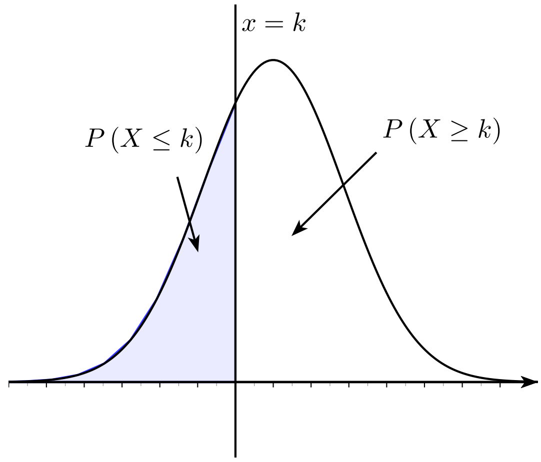


Ainsi, $P\left(175 \leq X \leq 190\right) \simeq 0,4456$

On peut modéliser par une **loi normale** d'espérance μ et d'écart type σ une variable aléatoire X dont l'histogramme des fréquence est tel que :

- les fréquences se répartissent de manière symétrique autour d'une valeur centrale μ ;
- plus on s'écarte de la valeur centrale, plus la fréquence est faible ;
- l'écart type de la série statistique associée aux fréquences est σ.

Pour tout nombre réel k, la probabilité $P(X \leq k)$ est égale à l'aire sous la courbe en cloche située à gauche de la droite d'équation $x = k$.



L'aire totale sous la courbe en cloche est 1 et pour tout réel k, on a :

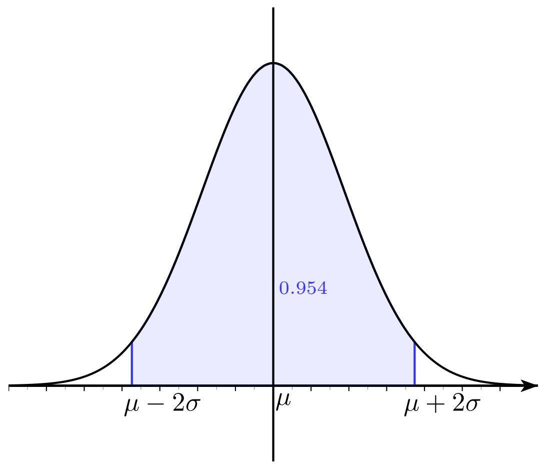
- $P(X = k) = 0$
- $P(X \geq k) = P(X > k)$
- $P(X \geq k) = 1 - P(X \leq k)$

En pratique, on utilise la calculatrice pour déterminer les probabilités associées à une loi normale d'espérance μ et d'écart type σ.

2 Intervalle de fluctuation $[\mu - 2\sigma; \mu + 2\sigma]$

Soit X une variable aléatoire qui suit une loi normale d'espérance μ et d'écart type σ. L'événement $X \in [\mu - 2\sigma; \mu + 2\sigma]$ a pour probabilité :

$$P(\mu - 2\sigma \leq X \leq \mu + 2\sigma) \simeq 0,954$$



On dit que l'intervalle $[\mu - 2\sigma; \mu + 2\sigma]$ est l'intervalle de fluctuation de la variable à 95%.